



Карлен Худавердиев, Ахмед Велиев

**Исследование одномерной
смешанной задачи для одного
класса псевдогиперболических
уравнений третьего порядка
с нелинейной операторной
правой частью**

Карлен Худавердиев, Ахмед Велиев

УДК 517.946

Главный редактор: Чл.-корр. НАН Азербайджана, д.ф.-м.н.,
профессор Б.А.ИСКЕНДЕРОВ

Рецензенты: д.ф.-м.н., профессор Б.Т.БИЛАЛОВ,
д.ф.-м.н., профессор Т.С.ГАДЖИЕВ

Худавердиев К.И., Велиев А.А. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. – Баку: Çaşıoğlu, 2010 – 168 с.

Многие задачи теории упругости, физики, гидромеханики, теории пластичности, механики сплошной среды, релятивистской квантовой механики и математической физики сводятся к изучению различных смешанных задач для линейных и, особенно, нелинейных гиперболических и псевдогиперболических уравнений.

Данная монография посвящена изучению вопросов существования (как в малом, так и в целом) и единственности, а также некоторых качественных свойств, различных типов решений одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью, причём отдельно, более детально изучен случай, когда этот оператор является оператором типа функции, т.е. он порождён обычной функцией.

Книга предназначена для математиков, механиков и физиков. В ней найдут много полезного для себя студенты старших курсов математических факультетов, а также аспиранты и научные сотрудники, занимающиеся изучением краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений.

1602040000-595
082-10

©Худавердиев К.И., Велиев А.А., 2010

ОГЛАВЛЕНИЕ

	стр.
ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА I. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с нелинейной операторной правой частью.....	
§1. Вспомогательные факты.....	30
§2. Исследование единственности решений задачи (1.1)-(1.3).....	43
§3. Исследование существования решений задачи (1.1)-(1.3).....	53
§4. Исследование существования и единственности решений задачи (1.1)-(1.3).....	81
§5. Ещё раз о существовании решений задачи (1.1)-(1.3).....	91
§6. Корректность постановки задачи (1.1)-(1.3).....	107
ГЛАВА II. Исследование почти всюду и классического решений одномерной смешанной задачи для одного класса полулинейных дифференциальных уравнений третьего порядка	
§1. Единственность решений задачи (2.1)-(2.3).....	113
§2. Существование в малом почти всюду и классического решений задачи (2.1)-(2.3).....	118
§3. Существование в целом почти всюду и классического решений задачи (2.1)-(2.3) для слабо нелинейных уравнений.....	133
§4. Существование в целом почти всюду и классического решений задачи (2.1)-(2.3) для сильно нелинейных уравнений.....	139
ЛИТЕРАТУРА.....	162

ВВЕДЕНИЕ

Книга посвящена изучению вопросов существования (как в малом, так и в целом) и единственности обобщённого, почти всюду и классического решений следующей одномерной смешанной задачи:

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - \alpha u_{txx}(t, x) = \mathcal{F}(u(t, x)) & (0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \ell), \end{cases} \quad (0.1)$$

$$\begin{cases} u(0, x) = \varphi(x) & (0 \leq x \leq \ell), \quad u_t(0, x) = \psi(x) & (0 \leq x \leq \ell), \end{cases} \quad (0.2)$$

$$\begin{cases} u(t, 0) = u(t, \ell) = 0 & (0 \leq t \leq T), \end{cases} \quad (0.3)$$

где $0 < T < +\infty$, $0 < \ell < +\infty$; $\alpha > 0$ - фиксированное число; φ, ψ - заданные функции, $\mathcal{F}$ - заданный, вообще говоря, нелинейный оператор, а $u(t, x)$ - искомая функция; кроме того, отдельно, более подробно, исследован случай задачи (0.1)-(0.3), когда $\mathcal{F}$ является оператором типа функции, а именно, когда уравнение (0.1) имеет вид:

$$u_{tt}(t, x) - \alpha u_{txx}(t, x) = F(t, x, u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tx}(t, x), u_{xx}(t, x)) \quad (0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \ell), \quad (0.4)$$

где $F(t, x, u_1, \dots, u_5)$ - заданная функция; далее, еще подробнее исследован случай, когда уравнение (0.4) имеет следующий специальный вид:

$$u_{tt}(t, x) - \alpha u_{txx}(t, x) = \sigma'(u_x(t, x)) \cdot u_{xx}(t, x) + f(x, u(t, x)) + \\ + F(t, x, u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tx}(t, x), u_{xx}(t, x)) \quad (0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \ell), \quad (0.5)$$

причём условия, налагаемые на функции σ и f , таковы, что объединение функций $\sigma'(u_x(t, x)) \cdot u_{xx}(t, x)$ и $f(x, u(t, x))$ с функцией $F(t, x, u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tx}(t, x), u_{xx}(t, x))$, вообще говоря, нецелесообразно.

Следует отметить, что многие задачи теории упругости, в частности, задача о продольном колебании упруго-вязкого неоднородного стержня, задача о продольном ударе абсолютно

твёрдым телом по упруго-вязкому неоднородному стержню конечной длины и переменного сечения, распространение волн в вязко-упругом теле, распространение импульсов вдоль нервных аксонов (нейронов) и многие другие задачи сводятся к решению смешанной задачи типа (0.1)-(0.3) для различных частных случаев уравнения (0.1).

Основным аппаратом исследования в данной книге являются методы и идеи нелинейного функционального анализа, реализованные в докторской диссертации [1] при изучении многомерной смешанной задачи для нелинейных гиперболических уравнений второго порядка.

Теперь, прежде, чем перейти к краткому описанию содержания данной книги, дадим краткий обзор некоторых работ, непосредственно связанных с задачей (0.1)-(0.3) и её многомерным аналогом, а также некоторых работ, в которых для различных частных случаев уравнения (0.1) и его многомерного аналога изучаются задачи, в определённом смысле близкие к задаче (0.2), (0.3).

В 1962-1963 годах в работах [2]-[4] рассмотрена задача:

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{txx}(t, x) = f(u(t, x)) \cdot u_t(t, x) + g(u(t, x)) & (t \geq 0, x \geq 0), \\ u(0, x) = \varphi(x) & (x \geq 0), \quad u_t(0, x) = \psi(x) & (x \geq 0), \\ u(t, 0) = \mu(t) & (t \geq 0); \end{cases}$$

доказана теорема существования и единственности классического решения и изучено поведение классического решения задачи при $t \rightarrow +\infty$ для случаев $g(u) = u$ и $g(u) = 0$.

В 1967 году в работе [5] Расуловой Г.А. (Худавердиевой Г.А.) рассмотрена задача (0.4), (0.2), (0.3) в случае, когда

$$F = u_{xx} + \lambda f(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx}), \quad \ell = \pi,$$

где λ - числовой параметр; введены понятия обобщённого, почти всюду и классического решений; с помощью метода последовательных приближений и принципов Красносельского М.А., Шаудера и Лере-Шаудера доказаны локальные (т.е. справедливые при достаточно малых значениях $|\lambda|$) и нелокаль-

ные теоремы существования и единственности обобщённого, почти всюду и классического решений; изучена непрерывная зависимость (в определённом смысле) всех трёх типов решений от φ, ψ и f ; кроме того, изучена ограниченность (в определённой норме) и поведение при $t \rightarrow +\infty$ решений, когда они существуют для любого $T > 0$. Следует особо отметить, что большинство теорем, установленных в работе [5], локальные, а в нелокальных теоремах либо функция $f(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx})$ удовлетворяет в $[0, T] \times [0, \pi] \times (-\infty, \infty)^5$ глобальному условию Липшица по переменным $u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx}$, либо $f = f(t, x, u, u_t, u_x)$ и функция $f(t, x, u, u_t, u_x)$ в $[0, T] \times [0, \pi] \times (-\infty, \infty)^3$ имеет по переменным u, u_t, u_x при $|u| + |u_t| + |u_x| \rightarrow +\infty$ лишь линейный (первый) порядок роста.

В 1968 году в работе [6] Гринберга Дж.М., Мак Кейми Р.К. и Мизеля В.Дж. рассмотрен частный случай задачи (0.5), (0.2), (0.3), когда $f \equiv 0, F \equiv 0, \ell = 1, \sigma(y) \in C^{(3)}(-\infty, \infty), \sigma(0) = 0, \sigma'(y) > 0 \quad \forall y \in (-\infty, \infty), \varphi(x) \in C^{(4)}([0, 1]), \varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0, \psi(x) \in C^{(2)}([0, 1]), \psi(0) = \psi(1) = \psi''(0) = \psi''(1) = 0$; доказано существование единственного классического решения $u(t, x)$, обладающего свойствами:

$$\sum_{i+j \leq 2} \left| \frac{\partial^{i+j} u(t, x)}{\partial t^i \partial x^j} \right|_{C([0, 1])} \equiv u(t) \leq M(\varphi, \psi) \quad \forall t \geq 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0,$$

где $M(\varphi, \psi)$ - постоянная, причём

$$M(\varphi, \psi) \rightarrow 0 \text{ при } \|\varphi(x)\|_{C^{(2)}([0, 1])} + \|\psi(x)\|_{C^{(2)}([0, 1])} \rightarrow 0. \quad (0.6)$$

В 1969 году в работе [7] Гринберга Дж.М. рассмотрена задача

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - \alpha u_{txx}(t, x) = E(u_x(t, x)) \cdot u_{xx}(t, x) & (0 \leq t < +\infty, 0 \leq x \leq 1), \\ u(0, x) = x & (0 \leq x \leq 1), u_t(0, x) = \psi(x) & (0 \leq x \leq 1), \\ u(t, 0) = 0 & (t \geq 0), u(t, 1) = 1 & (t \geq 0), \end{cases}$$

где $\alpha > 0$ - постоянная, $E(y) \in C^{(2)}(-\infty, \infty)$, $E(y) > 0 \quad \forall y \in (-\infty, \infty)$, $\psi(x) \in C^{(2)}([0, 1])$ и $\psi(0) = \psi(1) = 0$; доказано существование и единственность обобщённого (в определённом смысле) решения $u(t, x)$ этой задачи, обладающего свойствами:

$$\begin{aligned} & \|u(t, x) - x\|_{C([0, 1])} + \|u_x(t, x) - 1\|_{C([0, 1])} + \|u_t(t, x)\|_{C([0, 1])} + \\ & + \|u_{xx}(t, x)\|_{C([0, 1])} + \|u_{tx}(t, x)\|_{L_2(0, 1)} \equiv U(t) \leq .\mathcal{M}(\psi) \quad \forall t \geq 0, \\ & \lim_{t \rightarrow +\infty} U(t) = 0, \end{aligned}$$

где $.\mathcal{M}(\psi) \geq 0$ - постоянная, причём $.\mathcal{M}(\psi) \rightarrow 0$ при

$$\|\psi(x)\|_{C^{(1)}([0, 1])} \rightarrow 0.$$

В 1970 году в работе [8] Гринберга Дж. М. и Мак Кейми Р.К. рассмотрен частный случай задачи (0.5), (0.2), (0.3), когда $f \equiv 0$, $F \equiv 0$, $\ell = 1$, $\sigma(y) \in C^{(3)}(-\infty, \infty)$, $\sigma'(y) > 0 \quad \forall y \in (-\infty, \infty)$, $\varphi(x), \psi(x) \in C^{(2)}([0, 1])$, $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = \sigma'(\varphi'(0))\varphi''(0) + \alpha\psi''(0) = \sigma'(\varphi'(1))\varphi''(1) + \alpha\psi''(1) = 0$; доказано существование и единственность классического решения $u(t, x)$, обладающего свойствами:

$$\begin{aligned} & \|u(t, x)\|_{C([0, 1])} + \|u_t(t, x)\|_{C([0, 1])} + \|u_x(t, x)\|_{C([0, 1])} + \|u_{tx}(t, x)\|_{L_2(0, 1)} + \\ & + \|u_{xx}(t, x)\|_{C([0, 1])} \leq .\mathcal{M}(\varphi, \psi) \cdot e^{-kt} \quad \forall t \geq 0, \\ & \int_0^t e^{-2k\tau} \cdot \left\{ \|u_{tt}(\tau, x)\|_{L_2(0, 1)}^2 + \|u_{txx}(\tau, x)\|_{L_2(0, 1)}^2 \right\} d\tau \leq .\mathcal{M}(\varphi, \psi), \end{aligned}$$

где $k > 0$, $.\mathcal{M}(\varphi, \psi) \geq 0$ - постоянные и имеет место соотношение (0.6).

В 1970 году в работе [9] Мак Кейми Р.К. рассмотрена задача:

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} (\sigma(u_x(t, x)) + \lambda(u_x(t, x)) u_{tt}(t, x)) & (t \geq 0, 0 \leq x \leq 1), \\ u(0, x) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad u_t(0, x) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \quad (t \geq 0), \end{cases}$$

где

$$\varphi(x) \in C^{(4)}([0, 1]), \psi(x) \in C^{(2)}([0, 1]), \sigma(y) \in C^{(2)}(-\infty, \infty), \sigma(0) = 0, \sigma'(\xi) > 0 \quad \forall \xi \in (-\infty, \infty), \lambda(y) \in C^{(1)}(-\infty, \infty), 0 < \lambda_0 \leq \lambda(\xi) \leq \lambda_1 \quad \forall \xi \in (-\infty, \infty).$$

Такая задача возникает в нелинейной теории упругости. В работе установлено существование, единственность и стабилизация решений рассматриваемой задачи.

В 1971 году в работе [10] Крицкой С.С. рассмотрена задача о продольном ударе абсолютно твёрдым телом по упруговязкому неоднородному стержню конечной длины со свободными концами и переменного сечения, сводящаяся к краевой задаче:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(E_0 f(x) \omega(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_0 f(x) \omega(x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x} \right) = \\ = \rho \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} \quad (t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq \ell), \\ u(0, x) = 0 \quad (0 \leq x \leq \ell), \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x < \ell, \\ -v_0 & \text{при } x = \ell, \end{cases} \\ E_0 \frac{\partial u(t, 0)}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial^2 u(t, 0)}{\partial t \partial x} = 0 \quad (t > 0), \\ \omega(\ell) \left\{ E_0 f(\ell) \frac{\partial u(t, \ell)}{\partial x} + \mu_0 f(\ell) \frac{\partial^2 u(t, \ell)}{\partial t \partial x} \right\} = -m \frac{\partial^2 u(t, \ell)}{\partial t^2} \quad (t > 0), \end{cases}$$

где E_0, μ_0, ρ, v_0, m - положительные постоянные, $f(x), \omega(x)$ - положительные на $[0, \ell]$ функции, имеющие производную четвёртого порядка с полной ограниченной вариацией для

$0 \leq x \leq \ell$. Методом Фурье получено решение этой задачи в виде ряда, члены которого имеют порядок $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Проведено математическое исследование полученного решения, в связи с чем изучено поведение частных производных первого и второго порядка, а также $\frac{\partial^3 u(t, x)}{\partial t \partial x^2}$ для $0 \leq x \leq \ell$, $t > 0$ и при $t \rightarrow +\infty$.

В 1971 году в работе [11] Дэвиса П.Л. рассмотрен случай задачи (0.5), (0.2), (0.3), когда $f \equiv 0$, $F = F(t, x)$, $\ell = \pi$ и для решений установлена априорная оценка, позволяющая получить условия существования, единственности и асимптотической устойчивости.

В 1972 году в диссертации [12] Кулиевой Б.А. исследованы вопросы существования и единственности обобщённого и классического решений следующих двух одномерных предельных краевых задач:

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xxx}(t, x) = F(t, x, u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{xx}(t, x)) & (0 \leq t \leq T, x \geq 0), \\ u(0, x) = \varphi(x) \quad (x \geq 0), u_t(0, x) = \psi(x) \quad (x \geq 0), \\ u(t, 0) = \mu(t) \quad (0 \leq t \leq T); \\ \\ u_{tt}(t, x) - u_{txx}(t, x) = F_1(t, x, u(t, x)) & (0 \leq t \leq T, x \leq 0), \\ V_{tt}(t, x) - V_{xx}(t, x) = F_2(t, x, V(t, x)) & (0 \leq t \leq T, x \geq 0), \\ u(0, x) = \varphi_1(x) \quad (x \leq 0), \quad u_t(0, x) = \psi_1(x) \quad (x \leq 0), \\ V(0, x) = \varphi_2(x) \quad (x \geq 0), \quad V_t(0, x) = \psi_2(x) \quad (x \geq 0), \\ u(t, -0) = V(t, +0) \quad (0 \leq t \leq T), \\ \alpha(t)u_x(t, -0) = V_x(t, +0) \quad (0 \leq t \leq T), \end{cases}$$

где $0 < T < +\infty$, $F, F_1, F_2, \varphi, \varphi_1, \varphi_2, \psi, \psi_1, \psi_2, \mu, \alpha$ — заданные функции, а $u(t, x), V(t, x)$ — искомые функции.

В 1974 году в работе [13] Рубинова Л.Я. получены оценки влияния нормальных составляющих напряжений в вязкой сжимаемой жидкости на динамику ламинарного потока в трубе. Составлены уравнения для давлений и расходов, распространённые

ние которых описывается дифференциальными уравнениями в частных производных третьего порядка вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + b \cdot \alpha \frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

где $\alpha \geq 0$, $b > 0$, $c > 0$ – определённые постоянные. Рассматриваемая задача решена для давлений при нулевых начальных и одном из граничных условий. На другой границе действует возмущение $u_b = u_0 \sin \omega t$. Вынужденные колебания определены методом комплексных амплитуд, свободные – способом Фурье. Найдены коэффициенты влияния нормальных напряжений на динамические характеристики потока, определён коэффициент затухания, величина которого зависит от вязкости и собственных чисел задачи. Показано, что в коротких трубах (длиной $|\ell| < \pi$) влияния нормальных напряжений на затухание свободных колебаний велико уже для первых гармоник.

В 1974 году в работе [14] Соунти К.О.А. получены необходимые и достаточные условия существования периодического по t обобщённого решения задачи

$$\rho u_{tt}(t, x) - \mu u_{xx}(t, x) - \int_{-\infty}^t \mathcal{K}(t - \tau) u_{xx}(\tau, x) d\tau - \lambda u_{xxx}(t, x) = f(t, x) \\ (-\infty < t < +\infty, \quad 0 \leq x \leq 1),$$

где ρ, μ, λ – действительные числа, $f(t, x)$ – периодическая по t , квадратично суммируемая по прямоугольнику $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$ комплекснозначная функция и $\mathcal{K}$ – действительнозначная функция из пространства $L_2(0, +\infty)$. Решение ищется в виде

$$u(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) e^{2\pi i n t}; \text{ для функций } \varphi_n(x) \quad (n = 0, \pm 1, \dots) \text{ получа-}$$

ется задача на собственные значения для самосопряжённого вполне непрерывного оператора.

В 1974 году в работе [15] Нишихары К. рассмотрен частный случай задачи (0.5), (0.2), (0.3), когда $f \equiv 0$, $F \equiv 0$, $\sigma(y) \in C^{(3)}(-\infty, \infty)$, $\sigma(0) = 0$ и $\sigma'(y) > 0 \quad \forall y \in (-\infty, \infty)$; доказано,

что классическое решение этой задачи убывает экспоненциально при $t \rightarrow +\infty$ вместе со всеми своими производными до второго порядка включительно и, тем самым, усилен результат работы [6].

В 1975 году в работе [16] Дэвиса П.Л. рассмотрен частный случай задачи (0.5), (0.2), (0.3), когда $f \equiv 0$, $F \equiv 0$, $\ell = \pi$, $\sigma'(u_x) = a_1 + a_2 \cdot u_x^2$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ – постоянные, $\varphi(x), \psi(x)$ – достаточно гладкие на $[0, \pi]$ функции, причём $\varphi(0) = \varphi(\pi) = \psi(0) = \psi(\pi) = 0$; доказано, что существует решение $u_\alpha(t, x)$ этой задачи (при $0 \leq t \leq T^* \leq T$; T^* не зависит от α), непрерывно зависящее от начальных данных, при этом $T^* \rightarrow +\infty$ если $a_1 \rightarrow \infty$ или $\varphi, \psi \rightarrow 0$ в подходящем смысле; кроме того, при $\alpha \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial^{i+j} u_\alpha(t, x)}{\partial t^i \partial x^j} \rightarrow \frac{\partial^{i+j} u_0(t, x)}{\partial t^i \partial x^j} \quad \text{в } C([0, T^*] \times [0, \pi]) \quad (i+j \leq 2; i \leq 1).$$

В 1975 году в работе [17] Накао Митсухиро и Токимори Нанбу рассмотрена задача:

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - \Delta u_t(t, x) - \sum_{i=1}^n \left(|u_{x_i}(t, x)|^{p-2} \right)_{x_i} + \beta(x, u(t, x)) = f(t, x) \\ \hspace{25em} (t \geq 0, x \in \Omega), \\ u(0, x) = \varphi(x) \quad (x \in \Omega), \quad u_t(0, x) = \psi(x) \quad (x \in \Omega), \\ u(t, x)|_\Gamma = 0 \quad (\Gamma \equiv [0, \infty) \times \partial\Omega), \end{cases}$$

где Ω – ограниченная n -мерная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, Δ – n -мерный оператор Лапласа, $p \geq 2$, β, f, φ, ψ – заданные функции; найдены достаточные условия существования глобальных (ограниченных) решений, когда $\beta(x, u) \neq 0$ и не монотонна по u .

В 1975 году в работе [18] Клемана Дж.К. рассмотрена задача:

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - \Delta u_t(t, x) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_i(u_{x_i}(t, x))) = f(t, x) & (0 \leq t \leq T, x \in \Omega), \\ u(0, x) = \varphi(x) \quad (x \in \Omega), \quad u_t(0, x) = \psi(x) \quad (x \in \Omega), \\ u(t, x)|_{\Gamma} = 0 \quad (\Gamma \equiv [0, T] \times \partial\Omega), \end{cases}$$

где $0 < T < +\infty$, Ω – ограниченная n -мерная область с границей $\partial\Omega$, Δ – n -мерный оператор Лапласа,

$$\sigma_i(\xi) \in C^{(1)}(-\infty, \infty), \sigma_i(0) = 0, \quad 0 < \sigma'_i(\xi) \leq k_0 = \text{const} (i = \overline{1, n}),$$

$$\varphi(x) \in D(\Omega) \cap W_2^2(\Omega), \psi(x) \in D(\Omega), f(t, x) \in L_2((0, T) \times \Omega);$$

доказана теорема о существовании и единственности решения почти всюду.

В 1976 году в работе [19] Филимонова А.М. изучена задача нахождения периодических (по одной или обоим переменным) решений уравнения

$$u_{tt} - k |u_x|^n \cdot u_{xx} - \mu |u_{tx}|^n \cdot u_{tx} - \gamma u_t = 0,$$

где $k > 0$, $n > -1$, $\mu > 0$ – постоянные; найдены достаточные условия образования стоячих волн.

В 1977 году в работе [20] Рауппа М.А. и Ресенде Н.С. рассмотрен случай задачи (0.5), (0.2), (0.3), когда

$$f \equiv 0, F = F(t, x), \ell = 1, \sigma'(u_x) = a_1 + a_2 \cdot u_x^2$$

и для нахождения решения этой задачи применён метод Галёркина.

В 1979 году в работе [21] Кожанова А.И. рассмотрена задача:

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} (a(t, x) u_x(t, x)) = \frac{\partial}{\partial x} (b(t, x) \sigma(u_x(t, x))) + \\ + f(t, x, u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x)) \quad (0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq 1), \\ u(0, x) = u_t(0, x) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1), \quad u(t, 1) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \end{cases}$$

где $a(t, x) > 0$, $b(t, x) > 0$ при $0 \leq t \leq T$, $0 < x \leq 1$; $a(t, 0) = b(t, 0) = 0$ ($0 \leq t \leq T$); $\sigma(0) = 0$, $0 \leq \sigma'(y) \leq C_0 < 2 \forall y \in (-\infty, \infty)$; в $[0, T] \times [0, 1] \times (-\infty, \infty)^3$

$$|f(t, x, u, u_t, u_x)| \leq C \cdot \{1 + |u| + |u_t| + a(t, x) \cdot |u_x|\};$$

и выполнен целый ряд условий, связывающих функции a, b и f . Введено понятие обобщённого решения и доказана теорема существования обобщённого решения рассматриваемой задачи.

В 1979 году в работе [22] Эриа Дж.К. и Ларднера Р.У. изучены приближённые решения задачи (0.2), (0.3) для уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon \cdot \{2\mu u_x \cdot u_{xx} + 2\gamma u_x^2 \cdot u_{xx} - k \cdot u_{xxx}\},$$

отвечающего реологической модели Фойгта и описывающего плоские колебания среды, проявляющей малую нелинейную упругость и линейно вязкоупругое поведение, где $\mu > 0, \gamma > 0, k > 0$ – определённые постоянные, а $\varepsilon > 0$ – малый параметр.

В 1978-1979 годах в работах [23], [24] Эбихары Ю. при достаточно малых начальных и граничных данных доказано существование глобальных классических решений для уравнений вида

$$u_{tt} - \Delta u_t - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla u^{2p} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}) = 0;$$

$$u_{tt} - \Delta u_t + C_1 \cdot (\Delta u)^p + C_2 \cdot (\Delta u)^q = 0.$$

В 1980 году в работе [25] Эндрьюса Г. рассмотрен частный случай задачи (0.5), (0.2), (0.3), когда $f \equiv 0$, $F \equiv 0$, $\ell = 1$ и доказано существование единственного решения

$$u(t, x) \equiv u(t) \in C([0, T]; W_{\infty}^1(0, 1))$$

этой задачи.

В 1980 году в работе [26] Уэбба Дж.Ф. рассмотрена задача:

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - \alpha \Delta u_t(t, x) = \Delta u(t, x) + f(u(t, x)) & (t > 0, x \in \Omega), \\ u(0, x) = \varphi(x) \quad (x \in \Omega), \quad u_t(0, x) = \psi(x) \quad (x \in \Omega), \\ u(t, x)|_{\Gamma} = 0 \quad (\Gamma \equiv [0, T] \times \partial\Omega), \end{cases}$$

где $\alpha > 0$ – постоянная, Ω – ограниченная область в R^n ($n \leq 3$), Δ – n -мерный оператор Лапласа, f, φ, ψ – заданные функции; в работе найдены достаточные условия существования и единственности её сильного глобального решения и исследовано его поведение при $t \rightarrow +\infty$.

В 1980 году в работе [27] Лонгмана Дж.М. исследовано распространение волн в вязкоупругом теле из плоского и точечного источников ступенчатой функцией Хевисайда, причём изучаемая задача связана с решением нормализованного уравнения Стокса

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

В 1980 году в работе [28] Пяткова С.Г. рассмотрены следующие две задачи:

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) + \alpha(t, x)u_{xx}(t, x) + \beta(t, x)u_{tx}(t, x) + k(t, x)u_{ttx}(t, x) + \\ + a(t, x)u_t(t, x) + b(t, x)u_x(t, x) + c(t, x)u(t, x) = f(t, x) \\ (0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1), \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \\ u(0, x) = u(T, x) = 0 \quad (u_t(0, x) = u_t(T, x) = 0), \quad 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

когда $k(0, x) \geq 0, k(T, x) \leq 0$ (соответственно, $k(0, x) \leq 0, k(T, x) \geq 0$); при предположениях

$$\alpha(t, x), \beta(t, x), k(t, x), a(t, x), b(t, x), c(t, x) \in C^{(3)}([0, T] \times [0, 1]),$$

$$f(t, x) \in L_2((0, T) \times (0, 1)), \frac{1}{4}(\beta(t, x) - k_t(t, x))^2 < \alpha(t, x) - \frac{1}{2}|k_t(t, x)|,$$

$$\frac{1}{4}\beta^2(t, x) < \alpha(t, x) - \frac{1}{2}k_t(t, x)$$

доказано существование (в определённом классе) решения рассматриваемых задач.

В 1981 году в работе [29] Накао Митсухио рассмотрена задача:

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - (\rho(t, x)u_{tx}(t, x) + \sigma(u_x(t, x)))_x = 0 & (t \geq 0, 0 \leq x \leq 1), \\ u(0, x) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad u_t(0, x) = \psi(x) & (0 \leq x \leq 1), \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & (t \geq 0), \end{cases}$$

где $\rho(t, x) > 0$; при определённых условиях на функции ρ, σ, φ и ψ доказано существование и единственность глобального достаточно гладкого классического решения рассматриваемой задачи.

В 1981 году в работе [30] Кожанова А.И., Ларькина Н.А. и Яненко Н.Н. доказано существование и единственность решения почти всюду задачи:

$$\begin{cases} \beta u_{tt}(t, x) + u_t(t, x) + \alpha u(t, x)u_x(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} F(u_x(t, x)) - \\ - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} F_1(u_x(t, x)) = f(t, x) \quad (0 \leq t \leq T, a \leq x \leq b), \\ u(0, x) = \varphi(x) \quad (a \leq x \leq b), \quad u_t(0, x) = \psi(x) \quad (a \leq x \leq b), \\ u(t, a) = u(t, b) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \end{cases} \quad (0.7)$$

где $[a, b]$ – произвольный отрезок на оси x ; α, β – некоторые постоянные, $\beta \geq 0$; $F'(\eta)$ – произвольного знака, $F_1''(\eta) > 0$

$\forall \eta \in (-\infty, \infty)$, а оператор $L_0 u = \beta u_{tt} + u_t - \frac{\partial}{\partial x} F(u_x)$ является квазилинейным оператором переменного типа.

Отметим, что в случае $\beta \geq 0, \alpha = 0, F'(\eta) \geq 0, F_1'(\eta) > 0$ уравнение (0.7) встречается в теории упругости, в теории неньютоновских жидкостей и изучалось рядом авторов. При различных требованиях роста и гладкости на функции $F(\eta), F_1(\eta)$ получены теоремы о разрешимости в целом смешанной задачи для уравнения (0.7) (см., например, [6],[9],[21]).

В случае $\beta = 0, \alpha = 1, F(\eta) = \mu\eta, F_1(\eta) = \varepsilon\eta^3$, где ε, μ – положительные постоянные, уравнение (0.7) представляет собой регуляризованное уравнение Бюргерса, исследованное в [30].

В случае $\beta = 1, \alpha = 0, F_1(\eta) = \ln \eta$ смешанная задача для уравнения (0.7) изучалась в [31]. При этом в области отрицатель-

ных значений на производную $F'(\eta)$ налагалось условие подчинения функции $F'_i(\eta)$, а на начальные данные – условие типа знакоопределённости.

В работе [32] рассматривались уравнения третьего порядка в случае, когда дифференциальный оператор второго порядка $L_0 u$ является строго гиперболическим при малых u . Доказано существование решений, обладающих малой нормой, если начальные данные малы в той же норме.

А в вышеупомянутой работе [30] условия типа малости на начальные данные и правую часть отсутствуют.

В 1982 году в работе [33] Кожанова А.И. исследованы условия разрешимости смешанной задачи

$$\left\{ \begin{aligned} & \beta u_{tt}(t, x) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_i(t, x, u(t, x), \nabla u(t, x), \nabla u_t(t, x)) - \\ & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(t, x, u(t, x)) + A(t, x, u(t, x), u_t(t, x), \nabla u(t, x), \nabla u_t(t, x)) + \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(t, x, u(t, x), u_t(t, x), \nabla u(t, x)) = 0 \quad (0 < t < T, x \in \Omega), \\ & u(0, x) = \varphi(x) \quad (x \in \Omega), u_t(0, x) = \psi(x) \quad (x \in \Omega), \\ & u(t, x)|_{\Gamma} = 0 \quad (\Gamma \equiv (0, T) \times \partial\Omega), \end{aligned} \right.$$

где $0 < T < +\infty$, Ω – ограниченная n -мерная область с границей $\partial\Omega$, $\beta \geq 0$ – постоянная, $\sigma_i, F_i, A, A_i (i=1, n)$, φ, ψ – достаточно гладкие функции; доказана теорема существования решения почти всюду рассматриваемой задачи, для которого справедлива определённая априорная оценка.

В 1982 году в работе [34] Ларькина Н.А. рассмотрено квазилинейное уравнение в частных производных вида

$$\beta u_{tt} + u_t - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_i} F_i(t, x, u_x) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{G}_i(t, x, u_x) = f(t, x), \quad (0.8)$$

где выражение

$$\beta u_t - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(t, x, u_x)$$

есть параболический оператор; доказаны теоремы существования и единственности в целом в цилиндре обобщённых решений первой краевой задачи для уравнения (0.8), а также существование в целом обобщённого решения задачи Коши.

В 1982 году в работе [35] Эбихары Ю. рассмотрена задача:

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - \alpha \Delta u(t, x) - \Delta u_t(t, x) = \\ = f(t, x, u(t, x), u_t(t, x), \mathcal{D}u(t, x), \mathcal{D}u_t(t, x), \mathcal{D}^2u(t, x), \mathcal{D}^2u_t(t, x)) \\ (t > 0, x \in \Omega), \\ u(0, x) = \varphi(x) (x \in \Omega), \quad u_t(0, x) = \psi(x) \quad (x \in \Omega), \\ u(t, x) |_{\Gamma} = 0 \quad (\Gamma \equiv (0, +\infty) \times \partial\Omega), \end{cases}$$

где α — постоянная, Ω — ограниченная n -мерная область с границей $\partial\Omega$, $\mathcal{D}u(t, x) \equiv (u_{x_1}(t, x), \dots, u_{x_n}(t, x))$, $\mathcal{D}^2u(t, x) \equiv$

$$\mathcal{D}^2u(t, x) \equiv (u_{x_1x_1}(t, x), \dots, u_{x_1x_n}(t, x), \dots, u_{x_nx_1}(t, x), \dots, u_{x_nx_n}(t, x)),$$

Δ — оператор Лапласа; при определённых специальных условиях относительно нелинейной функции f установлено существование некоторого (неограниченного) множества W в соответствующем пространстве С.Л.Соболева, такого, что если начальные данные φ и ψ принадлежат W , то рассматриваемая задача имеет решение при всех $t > 0$.

В 1982 году в работе [36] Артюшина А.Н. рассмотрена задача:

4833

$$\left\{ \begin{aligned} u_{tt}(t, x) - \lambda \frac{\partial}{\partial x} \sigma(u_x(t, x), u_{tx}(t, x)) - \mu \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} F(u_x(t, x)) &= f(t, x) \\ (0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1), \\ u(0, x) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad u_t(0, x) &= \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \\ u_x(t, 0) = u_x(t, 1) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \end{aligned} \right.$$

где λ, μ – постоянные; при определённых условиях на функции σ, F, f, φ и ψ доказаны теоремы о существовании и единственности решения почти всюду рассматриваемой задачи.

В 1982 году в работе [37] Кожанова А.И. найдены условия разрешимости (в соответствующих классах) следующих двух задач:

$$\left\{ \begin{aligned} u_{tt}(t, x) + (-1)^n \mathcal{D}^n F(t, x, u(t, x), \mathcal{D}u(t, x), \dots, \mathcal{D}^n u(t, x)) + \\ + (-1)^n \mathcal{D}^{2n} u_t(t, x) = f(t, x, u(t, x), \dots, \mathcal{D}^{2n-1} u(t, x)) \quad (0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1), \\ u(0, x) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad u_t(0, x) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \\ \mathcal{D}^{2k} u(t, 0) = \mathcal{D}^{2k} u(t, 1) = 0 \quad (\mathcal{D}^k u(t, 0) = \mathcal{D}^k u(t, 1) = 0) \\ (k = 0, 1, \dots, n-1; t \in [0, T]), \end{aligned} \right.$$

где $0 < T < +\infty$, n – натуральное число, $\mathcal{D} \equiv \frac{\partial}{\partial x}$. Кроме того, для

первой задачи доказана также единственность решения.

В 1983 году в работе [38] Дорау Геневефа для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_i^2} - \lambda \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \right) = 0 \quad (0 \leq t \leq T, x \in \Omega)$$

рассмотрены следующие две задачи:

$$\left. \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \right|_{\Gamma_0} = f_1(x), u(t, x) \Big|_{\Sigma_T} = f_2(t, x), \quad u(t, x) \Big|_{\Gamma_T} = f_3(x);$$

$$\left. \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \right|_{\Gamma_n} = f_1(x), u(t, x) \Big|_{\Sigma_T} = f_2(t, x), \quad u(t, x) \Big|_{\Gamma_0} = f_3(x) u(t, x) \Big|_{\Gamma_0},$$

где $\lambda > 0$, Ω — n -мерная ограниченная область с границей S , $\Gamma_t = \{t\} \times \Omega$, $\sum_T = [0, T] \times S$, $0 < t_0 < T$. Получены теоремы существования и единственности регулярных решений этих задач.

В 1983 году в работе [39] Эбихары Ю. для каждого из уравнений

$$u_{tt}(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} (\sigma(u_x^2(t, x))u_x(t, x) + \rho(u(t, x))u_{tx}(t, x)) + f(t, x)$$

$$(t \geq 0, a \leq x \leq b),$$

$$u_{tt}(t, x) = u_{txx}(t, x) + \sigma(u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tx}(t, x))u_{xx}(t, x) + \\ + \rho(u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x))u_{txx}(t, x) + f(t, x) \quad (t \geq 0, a \leq x \leq b),$$

$$u_{tt}(t, x) = \sigma(u_{xx}^2(t, x))u_{xx}(t, x) + u_{txx}(t, x) + f(t, x) \quad (t \geq 0, a \leq x \leq b)$$

рассмотрена задача

$$u(0, x) = \varphi(x) (a \leq x \leq b), u_t(0, x) = \psi(x) (a \leq x \leq b),$$

$$u(t, a) = u(t, b) = 0 \quad (t \geq 0);$$

при некоторых условиях на данные доказано, что каждая из этих трёх задач имеет единственное решение в классе

$$C^{(1)}([0, +\infty); \overset{0}{W}_2^1(a, b) \cap W^3(a, b)) \cap C^2([0, +\infty); \overset{0}{W}_2^1(a, b));$$

изучены также свойства решений этих задач.

В 1983 году в работе [40] Артюшина А.Н. рассмотрена задача:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(u_t(t, x)) + (-1)^n \mathcal{D}^n F(D^n u(t, x)) - (-1)^n \mathcal{D}^{2n-2} u_t(t, x) = \\ = f(t, x) \quad (0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1), \\ u(0, x) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad u_t(0, x) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \\ \mathcal{L}^{2k} u(t, 0) = \mathcal{L}^{2k} u(t, 1) = 0 \quad (k = 0, \dots, n-1; t \in [0, T]), \end{aligned} \right.$$

где $0 < T < +\infty$, n — натуральное число, $\mathcal{D} \equiv \frac{\partial}{\partial x}$; в работе для любых n , при некоторых условиях малости правой части и начальных данных, методом регуляризации доказано существование единственного глобального регулярного решения $u(t, x)$, такого, что

$$\mathcal{D}^{2n} u(t, x) \in L_{\infty}((0, T); L_2(0, 1)), \mathcal{D}^n u_t(t, x) \in L_{\infty}((0, T); L_2(0, 1)),$$

$$\mathcal{D}^{2n-1} u_t(t, x) \in L_2((0, T) \times (0, 1)), u_{tt}(t, x) \in L_2((0, T) \times (0, 1)).$$

В 1984 году в работе [41] Беркалиева З.Б. рассмотрена система уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(A(x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} S \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right) + k(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \\ + f(u(t, x), v(t, x)) + p(x) = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(B(x) \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} \right) + g(u(t, x), v(t, x)) + q(x) = 0$$

при $t > 0$ и $0 < x < 1$ с нулевыми граничными условиями, причём $u(t, x) \in R^n$, $v(t, x) \in R^m$; при некоторых условиях на коэффициенты и нелинейные члены системы, основными из которых являются симметричность и положительная определённость матриц $A(x)$ и $B(x)$, неотрицательность константы ε , монотонность отображения S , имеющего линейный рост, и существование функции Ляпунова, доказано существование аттрактора, имеющего достаточно регулярную структуру, к которому с ростом времени стремятся семейства решений, отвечающие ограниченными множествам начальных значений в функциональном пространстве.

В работах [42]-[43], [44]-[45] и [46]-[48] доказаны теоремы единственности, существования, существования и единственности и непрерывной зависимости (в определённом смысле) от φ, ψ и $\mathcal{F}$ соответственно обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (0.1)-(0.3). А в работах [49]-[52] доказаны теоремы единственности (в целом), существования (как в малом, так и в целом) и существования и единственности почти

всюду и классического решений задач (0.4), (0.2),(0.3) и (0.5),(0.2),(0.3). Все результаты работ [42]-[52] включены в диссертацию [53] Шарифова Т.А., защищённую в 1985 году.

В 1986 году в работе [54] Данг Дин Хай рассмотрена задача:

$$\left\{ \begin{aligned} u_{tt}(t, x) - \Delta u(t, x) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (|u_{\alpha_i}(t, x)|^\alpha \cdot u_{x_i}(t, x)) + \\ + f(u(t, x), u_t(t, x)) = 0 \quad (0 \leq t \leq T, x \in \Omega), \\ u(0, x) = \varphi(x) (x \in \Omega), \quad u_t(0, x) = \psi(x) (x \in \Omega), \\ u(t, x) \big|_{\Gamma} = 0 \quad (\Gamma \equiv [0, T] \times \partial\Omega), \end{aligned} \right.$$

где $0 < T < +\infty$, Ω – n -мерная ограниченная область с границей $\partial\Omega$, Δ – оператор Лапласа, $\alpha \geq 0$ – постоянная, f, φ, ψ – заданные функции; доказано существование и единственность решения рассматриваемой задачи; кроме того, при $\alpha = 0$, $f(0, 0) = 0$ установлено экспоненциальное убывание u при $t \rightarrow +\infty$.

В 1987 году в работе [55] Сувейки И.В. доказана однозначная разрешимость основных смешанных задач для уравнения

$$u_{tt}(t, x) = \eta \Delta u_t(t, x) + \Delta u(t, x) \quad ((t, x) \in (0, T) \times \Omega),$$

где $T > 0$, Ω – неограниченная область в R^n ($n \geq 2$) с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ , представляющей собой компакт, и $\eta > 0$ – постоянная; в функциональных пространствах с конечным интегралом энергии найден первый член асимптотики обобщённых решений при $\eta \rightarrow +0$. Если же начальные данные финитны и бесконечно гладкие, то дана асимптотика при большом времени классических решений и установлена стабилизация к нулю интеграла энергии.

В 1987 году в работе [56] Артюшина А.Н. доказана теорема существования обобщённого решения задачи:

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \sigma(u_t(t, x), u_{tx}(t, x)) = f(t, x) & ((t, x) \in (0, T) \times (0, 1)), \\ u(0, x) = \varphi(x) (0 \leq x \leq 1), \quad u_t(0, x) = \psi(x) & (0 \leq x \leq 1), \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & (0 \leq t \leq T). \end{cases}$$

Работы [57]-[61] посвящены изучению вопросов существования и единственности почти всюду и классического решений следующей многомерной смешанной задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} L(u(t, x)) = \\ = F(t, x, u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tx}(t, x), u_{xx}(t, x)) \\ (t \in [0, T], x \in \bar{\Omega}), \end{cases} \quad (0.9)$$

$$u(0, x) = \varphi(x) (x \in \Omega), \quad u_t(0, x) = \psi(x) \quad (x \in \bar{\Omega}), \quad (0.10)$$

$$u(t, x) \big|_{\Gamma} = 0 \quad (\Gamma \equiv [0, T] \times \partial\bar{\Omega}), \quad (0.11)$$

где $0 < T < +\infty$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, Ω — n -мерная ограниченная область с границей $\partial\Omega$,

$$L(u(t, x)) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_j}) - a(x)u(t, x), \quad (0.12)$$

причём в $\bar{\Omega}$

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), a(x) \geq 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \cdot \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad (\alpha = \text{const} > 0; \xi_i \in (-\infty, \infty)), \quad (0.13)$$

φ, ψ, F — заданные функции, а $u(t, x)$ — искомая функция, кроме того,

$$u_x \equiv (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}), u_{xx} \equiv (u_{x_1 x_1}, \dots, u_{x_1 x_n}, \dots, u_{x_n x_1}, \dots, u_{x_n x_n}). \quad (0.14)$$

В работах [57] и [58] для любых размерностей n доказаны: теорема единственности в целом, теорема существования в малом

и теорема существования в целом решения почти всюду задачи (0.9)-(0.11).

А в работах [59] и [60] для классического решения задачи (0.9)-(0.11) получены следующие результаты:

- 1) для любых размерностей n доказана теорема единственности в целом;
- 2) для любых размерностей n доказана теорема существования в малом;
- 3) для размерности $n = 1$ доказана теорема существования в целом;
- 4) в случае $F = F(t, x, u, u_t, u_x)$ для размерностей $n \leq 6$ доказана теорема существования в целом;
- 5) в случае $F = F(t, x, u)$ для размерностей $n \leq 10$ доказана теорема существования в целом.

Все результаты работ [57]-[60] включены в диссертацию [62] Алиева С.Дж., защищённую в 1987 году.

В 1988 году в работе [63] Лаптева Г.И. изучено уравнение

$$w_{tt}(t, x) = a(t, x, w(t, x), w_x(t, x), w_{xx}(t, x))w_{xxx}(t, x) + \\ + b(t, x, w(t, x), w_t(t, x), w_x(t, x)),$$

которое, заменой $w_t = u$ приводится к виду

$$u_t(t, x) = a(t, x, \int_0^t u(\tau, x) d\tau, \int_0^t u_x(\tau, x) d\tau, u_x(t, x)) u_{xx}(t, x) + \\ + b(t, x, \int_0^t u(\tau, x) d\tau, u(t, x), u_x(t, x)).$$

Для этого уравнения ставится начально-краевая задача и доказывается существование и единственность классического решения методами, основанными на применении принципа максимума для параболических уравнений. Уравнение содержит интегралы от неизвестной функции в своих коэффициентах, что составляет особенность задачи, так как эти интегралы определяют нелокальные операторы.

В 1988 году в работе [64] Лаптева Г.И. в ограниченной области $\Omega \subset R^n$ изучено уравнение

$$u_{tt}(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(u_x(t, x)) u_{x_i x_j}(t, x) + \\ + \lambda \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(u_x(t, x)) u_{x_i x_j}(t, x) + f(t, x),$$

которое переписывается в виде

$$u_t(t, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(u_x(t, x)) u_{x_i x_j}(t, x) + \\ + \lambda \int_0^t \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(u_x(\tau, x)) u_{x_i x_j}(\tau, x) d\tau + g(t, x).$$

К последнему уравнению применяются методы, основанные на принципе максимума для параболических уравнений, что приводит к условиям существования классического решения рассматриваемого уравнения.

В 1988 году в работе [65] Лин Ян Пинг рассмотрена задача:

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(t, x) u_{x_i}(t, x)) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (b_{ij}(t, x) u_{x_i}(t, x)) = \\ = \frac{\partial}{\partial t} F(t, x, u(t, x), u_x(t, x)) \quad \text{в } Q_T, \\ u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x) \quad \text{в } \Omega, \\ u(t, x) = 0 \quad \text{в } (0, T) \times \partial\Omega, \end{cases}$$

где $0 < T < +\infty$, Ω — ограниченная область в R^n с границей $\partial\Omega$ класса C^2 , $Q_T \equiv (0, T) \times \Omega$,

$$\varphi(x) \in W_2^0(\Omega), \quad \psi(x) \in L_2(\Omega), \quad a_{ij}(t, x) \in C^1(\overline{Q_T}), \quad a_{ij}(t, x) = a_{ji}(t, x),$$

$$a_0 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \leq a_1 |\xi|^2, \quad b_{ij}(t, x), \quad \frac{\partial}{\partial x_j} b_{ij}(t, x)$$

измеримы и ограничены в Q_T , $F(t, x, p, q)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по p и q равномерно в $Q_T \times (-\infty, \infty)^{n+1}$. С помощью аппроксимации доказана теорема

существования слабого (из $W_{t,x,2}^{1,2}(Q_T)$) решения этой задачи, его единственность и непрерывная зависимость от начальных данных и правой части уравнения.

В 1988 году в работе [66] Лиу Яченг, Лиу Даоченг изучена задача:

$$\begin{cases} u_n(t, x) - \alpha \Delta u_t(t, x) - \Delta u(t, x) = f(u(t, x)) & \text{в } (0, \infty) \times \Omega, \\ u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x) & \text{в } \Omega, \\ u(t, x) = 0 & \text{в } (0, \infty) \times \partial\Omega, \end{cases}$$

где $\alpha > 0$ – постоянная, $\Omega \subset R^n$ ($n = 1, 2, 3$) – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^2 . Показано, что если $\varphi(x), \psi(x) \in$

$W_2^2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega)$ и $f(u)$ – ограниченная сверху функция класса C^1 , то существует единственное сильное глобальное решение этой задачи. Установлены также оценки этого решения.

В 1988 году в работе [67] Андраде Н.Г. рассмотрено уравнение

$$u_{tt}(t, x) - (m_0 + m_1 \cdot \int_{\Omega} |\nabla u(t, x)|^2 dx) \Delta u(t, x) + \alpha u(t, x) + \\ + \beta \Delta u_t(t, x) = f(t, x) \quad (t \in (0, T), x \in \Omega)$$

с условиями

$$u(0, x) = u(T, x), u_t(0, x) = u_t(T, x) \quad \text{в } \Omega, u(t, x) = 0 \quad \text{в } (0, T) \times \partial\Omega$$

где $0 < T < +\infty$, $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$,

$$m_0 > 0, m_1 > 0, \alpha > 0, \alpha \neq k^2 \cdot \left(\frac{\pi}{T}\right)^2, f(t, x) \in C([0, T]; L_2(\Omega)).$$

Доказано существование по крайней мере одного слабого решения $u(t, x)$ этой задачи, обладающего свойствами

$$u_t(t, x) \in L_x((0, T); W_2^2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega)), u_{tt}(t, x) \in L_x((0, T); L_2(\Omega)).$$

В 1988 году в работе [68] Кубашевского Владислава рассмотрена задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(u_t(t,x) - u_{xx}(t,x)) = f(t,x) & (t \in (0,T), x \in (-a,a)), \\ u(0,x) = \varphi(x) \quad (-a < x < a), \quad u_t(0,x) - u_{xx}(0,x) = \psi(x) \quad (-a < x < a), \\ u(t,-a) = h_1(t) \quad (0 < t < T), \quad u_x(t,a) = h_2(t) \quad (0 < t < T); \end{cases}$$

с помощью функции Грина построено решение этой задачи и доказана его единственность.

В 1989 году в работе [69] Жамалова Р.С. рассмотрена задача:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - u_{txx}(t,x) - \frac{\partial}{\partial x} F(u_x(t,x)) = 0 & (0 \leq t \leq T, x \geq 0), \\ u(0,x) = \varphi(x) \quad (x \geq 0), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \quad (x \geq 0), \\ u_t(t,0) - a \cdot u_x(t,0) = 0 & (0 \leq t \leq T), \end{cases}$$

где $0 < T < +\infty$, a – постоянная, F, φ, ψ – заданные функции. При определённых условиях на функции F, φ и ψ доказано существование единственного решения $u(t,x)$ этой задачи, для которого справедлива оценка

$$\|u(t,x)\|_{w_2^2(Q_T)} + \|u_{txx}(t,x)\|_{L_2(Q_T)} \leq C \cdot (\|\varphi(x)\|_{w_2^2(0,\infty)} + \|\psi(x)\|_{w_2^2(0,\infty)}),$$

где $Q_T \equiv (0,T) \times (0,\infty)$, а $C > 0$ – постоянная.

В 1990 году в работе [70] Тсуджиока Кунио рассмотрена задача:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - 2\beta u_{txx}(t,x) - \alpha u_{xx}(t,x) = 0 & (t \geq 0, 0 \leq x \leq 1), \\ u(0,x) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad u_t(0,x) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \\ u(t,0) = 0 \quad (t \geq 0), \quad u_x(t,1) + k u_{xx}(t,1) = 0 & (t \geq 0), \end{cases}$$

где α, β, k – положительные постоянные; доказаны теоремы существования и единственности слабого решения этой задачи.

А теперь перейдем к краткому описанию содержания данной книги, которая состоит из введения и двух глав.

Во введении дается постановка задачи, изучению которой посвящена данная книга, подчеркивается цель данной книги и дается краткий обзор некоторых работ, непосредственно или в определённом смысле связанных с тематикой данной книги.

Глава I, состоящая из шести параграфов, посвящена изучению вопросов существования, единственности и непрерывной зависимости (в определённом смысле) от φ, ψ и $\mathcal{F}$ обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (0.1)-(0.3).

В §1 главы I введены некоторые банаховы пространства, нужные для исследования задачи (0.1)-(0.3), и в них установлен критерий компактности множеств; введены определения обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (0.1)-(0.3); установлены некоторые вспомогательные факты; кроме того, приняты некоторые обозначения, используемые в дальнейшем.

В §2 главы I доказаны теоремы о единственности обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (0.1)-(0.3).

В §3 главы I с помощью комбинированного принципа М.А.Красносельского и принципа ненулевого вращения доказаны различные теоремы существования обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (0.1)-(0.3).

В §4 главы I методом последовательных приближений доказаны теоремы существования и единственности обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (0.1)-(0.3).

В §5 главы I, комбинированием метода последовательных приближений с принципом Шаудера, доказаны теоремы существования обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (0.1)-(0.3), не вытекающие из результатов §3 данной главы.

В последнем §6 главы I с помощью неравенства Беллмана доказаны теоремы о непрерывной зависимости (в определённом смысле) от φ, ψ и $\mathcal{F}$ обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (0.1)-(0.3).

Глава II, состоящая из четырех параграфов, посвящена изучению вопросов единственности и существования почти всюду и классического решений задачи (0.4), (0.2), (0.3).

В §1 главы II доказана теорема о единственности почти всюду и классического решений задачи (0.4), (0.2), (0.3).

В §2 главы II, комбинированием метода последовательных приближений с принципом Шаудера, доказаны теоремы существования в малом почти всюду и классического решений задачи (0.4), (0.2), (0.3).

В §3 главы II, пользуясь результатами предыдущего параграфа, методами априорных оценок доказаны теоремы существования в целом почти всюду и классического решений задачи (0.4), (0.2), (0.3).

В последнем §4 главы II методами априорных оценок доказаны теоремы существования в целом почти всюду и классического решений задачи (0.5), (0.2), (0.3).

Следует отметить, что результаты главы II не следуют из абстрактных результатов главы I, а дополняют результаты главы I, относящиеся к почти всюду и классическим решениям задачи (0.1)-(0.3).

В заключение введения отметим, что в данной книге все величины вещественные, все функции действительнзначные, а интегралы всюду понимаются в смысле Лебега.

ГЛАВА I

Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с нелинейной операторной правой частью

Данная глава посвящена исследованию следующей одномерной смешанной задачи:

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - \alpha u_{ttx}(t, x) = \mathcal{F}(u(t, x)) & (0 \leq t \leq T \quad 0 \leq x \leq \ell), \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} u(0, x) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq \ell), \quad u_t(0, x) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq \ell), \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} u(t, 0) = u(t, \ell) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \end{cases} \quad (1.3)$$

где $0 < T < +\infty$, $0 < \ell < +\infty$; $\alpha > 0$ — фиксированное число; φ, ψ — заданные функции, $\mathcal{F}$ — заданный, вообще говоря, нелинейный оператор, а $u(t, x)$ — искомая функция.

В данной главе введены понятия обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (1.1)-(1.3); доказаны теоремы единственности обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (1.1)-(1.3); с помощью принципов М.А.Красносельского (см.[71], стр. 1234), Шаудера и ненулевого вращения (см, например, [72], стр.322) доказаны теоремы существования обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (1.1)-(1.3); с помощью метода последовательных приближений доказаны теоремы существования и единственности обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (1.1)-(1.3); кроме того, с помощью неравенства Р.Беллмана (см, например, [73], стр.188-189) доказаны теоремы о непрерывной зависимости (в определённом смысле) от начальных функций $\varphi(x), \psi(x)$ и нелинейного оператора $\mathcal{F}$ обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (1.1)-(1.3).

§1. Вспомогательные факты.

В этом параграфе с целью исследования задачи (1.1)-(1.3) введём серию банаховых пространств, примем определения обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (1.1)-(1.3) и установим ряд новых вспомогательных фактов, используемых во всей книге.

1. Обозначим через $B_{\beta_0, \dots, \beta_\ell, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_\ell}$ совокупность всех функций $u(t, x)$ вида

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad (1.4)$$

рассматриваемых на множестве $[0, T] \times [0, \ell]$, для которых все функции $u_n(t) \in C^{(\ell)}([0, T])$ и

$$J_T(u) \equiv \sum_{i=0}^{\ell} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(i)}(t)| \right)^{\beta_i} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}} < +\infty,$$

где $\ell \geq 0$ - целое число, $\alpha_i \geq 0 (i = \overline{0, \ell}), 1 \leq \beta_i \leq 2 (i = \overline{0, \ell})$ - фиксированные числа. В этом множестве операции сложения и умножения на числа (действительные) определим обычным образом; под нулевым элементом этого множества будем понимать функцию $u(t, x) \equiv 0$ на $[0, T] \times [0, \ell]$, а норму в этом множестве определим формулой

$$\|u(t, x)\|_{B_{\beta_0, \dots, \beta_\ell, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_\ell}} \equiv \sum_{i=0}^{\ell} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(i)}(t)| \right)^{\beta_i} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}}. \quad (1.5)$$

Очевидно, что все эти пространства банаховы. Действительно, справедливость первых двух аксиом нормы очевидна, а справедливость третьей аксиомы нормы легко устанавливается с помощью сумматорного неравенства Минковского; следовательно, $B_{\beta_0, \dots, \beta_\ell, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_\ell}$ является линейным нормированным пространством. А его полноту докажем. Итак, пусть

$$u_k(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,k}(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad (k = 1, 2, \dots)$$

- любая последовательность, фундаментальная в $B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер k_ε , что

$$\begin{aligned} & \|u_k(t, x) - u_m(t, x)\|_{B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}} = \\ & = \sum_{i=0}^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_{n,k}^{(i)}(t) - u_{n,m}^{(i)}(t)| \right)^{\beta_i} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}} < \varepsilon \quad \forall k, m \geq k_\varepsilon. \quad (1.6) \end{aligned}$$

Следовательно, при любом фиксированном $n (n = 1, 2, \dots)$:

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} |u_{n,k}^{(i)}(t) - u_{n,m}^{(i)}(t)| & \equiv \|u_{n,k}^{(i)}(t) - u_{n,m}^{(i)}(t)\|_{C([0, T])} < \varepsilon \\ & (i = \overline{0, l}) \quad \forall k, m \geq k_\varepsilon. \quad (1.7) \end{aligned}$$

А это означает, что при любом фиксированном $n (n = 1, 2, \dots)$ последовательность $\{u_{n,k}(t)\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна и, следовательно, в силу полноты $C^{(i)}([0, T])$, сходится в пространстве $C^{(i)}([0, T])$:

$$u_{n,k}(t) \xrightarrow{C^{(i)}([0, T])} u_{n,0}(t) \in C^{(i)}([0, T]) \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (1.8)$$

Далее, в силу (1.6), для любого фиксированного номера N :

$$\sum_{i=0}^l \left\{ \sum_{n=1}^N \left(n^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_{n,k}^{(i)}(t) - u_{n,m}^{(i)}(t)| \right)^{\beta_i} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}} < \varepsilon \quad \forall k, m \geq k_\varepsilon. \quad (1.9)$$

Пользуясь соотношением (1.8) и переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$ в (1.9), получаем:

$$\sum_{i=0}^l \left\{ \sum_{n=1}^N \left(n^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_{n,k}^{(i)}(t) - u_{n,0}^{(i)}(t)| \right)^{\beta_i} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}} \leq \varepsilon \quad \forall k \geq k_\varepsilon. \quad (1.10)$$

Отсюда, в силу произвольности N (или одно и тоже, переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$), получаем:

$$\sum_{i=0}^{\ell} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_{n,k}^{(i)}(t) - u_{n,0}^{(i)}(t)| \right)^{\beta_i} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}} \leq \varepsilon \quad \forall k \geq k_{\varepsilon}. \quad (1.11)$$

Примем обозначение:

$$u_0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,0}(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x. \quad (1.12)$$

Так как $u_0(t, x) = [u_0(t, x) - u_{k_{\varepsilon}}(t, x)] + u_{k_{\varepsilon}}(x)$ и, в силу (1.11), $u_0(t, x) - u_{k_{\varepsilon}}(t, x) \in B_{\beta_0, \dots, \beta_{\ell}, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_{\ell}}$, а также, $u_{k_{\varepsilon}}(t, x) \in B_{\beta_0, \dots, \beta_{\ell}, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_{\ell}}$, то получаем, что

$$u_0(t, x) \in B_{\beta_0, \dots, \beta_{\ell}, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_{\ell}}.$$

Таким образом, в силу (1.11), для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер k_{ε} , что

$$\|u_k(t, x) - u_0(t, x)\|_{B_{\beta_0, \dots, \beta_{\ell}, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_{\ell}}} \leq \varepsilon \quad \forall k \geq k_{\varepsilon}.$$

А это означает, что последовательность $u_k(t, x)$ сходится в $B_{\beta_0, \dots, \beta_{\ell}, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_{\ell}}$ к элементу $u_0(t, x) \in B_{\beta_0, \dots, \beta_{\ell}, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_{\ell}}$. Этим полнота и, следовательно, банаховость пространств $B_{\beta_0, \dots, \beta_{\ell}, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_{\ell}}$ доказана.

Отметим, что из введённой серии банаховых пространств $B_{\beta_0, \dots, \beta_{\ell}, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_{\ell}}$ мы в данной книге будем, по существу, пользоваться лишь пространствами

$$\begin{aligned} & B_{2,T}^0, \quad B_{2,T}^1, \quad B_{2,T}^2, \quad B_{2,T}^3; \\ & B_{2,2,T}^{2,0}, \quad B_{2,2,T}^{2,1}, \quad B_{2,2,T}^{3,2}, \quad B_{2,2,T}^{4,3}; \\ & B_{1,1,T}^{2,1}, \quad B_{1,1,T}^{3,2}. \end{aligned}$$

В дальнейшем для функций $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \in B_{\beta_0, \dots, \beta_{\ell}, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_{\ell}}$ часто будем пользоваться обозначениями:

$$\|u\|_{B_{\beta_0, \dots, \beta_{\ell}, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_{\ell}}} \equiv \sum_{i=0}^{\ell} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \leq \tau \leq T} |u_n^{(i)}(\tau)| \right)^{\beta_i} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}} \quad (t \in [0, T]). \quad (1.13)$$

Легко показать, что любой функции $u(t, x) \in B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}$ функция

$$U(t) = \|u\|_{B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}}$$

неотрицательна, неубывающая и непрерывна на $[0, T]$.

Далее, для функции $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x$ функцию $u_n(t) (n=1, 2, \dots)$ назовём её n -ой компонентой. Пусть $\mathcal{M} \subset B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}$ - заданное непустое множество. Обозначим через $\mathcal{M}_n (n=1, 2, \dots)$ совокупность n -ых компонент всех элементов множества $\mathcal{M}$. Справедлива следующая

Теорема 1.1. Для компактности множества $\mathcal{M} \subset B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}$ в $B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

а) для каждого $n (n=1, 2, \dots)$ множество $\mathcal{M}_n$ компактно в $C^{(l)}([0, T])$;

б) для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N_ε , один и тот же

для всех $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \in M$, такой, что

$$\sum_{i=0}^l \left\{ \sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty} \left(n^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(i)}(t)| \right)^{\beta_i} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}} < \varepsilon. \quad (1.14)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть множество $\mathcal{M} \subset B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}$ компактно в $B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}$. Так как из соотношения

$$B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l} \ni \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,k}(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \xrightarrow{B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}} \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,0}(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \in B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l} (k \rightarrow \infty)$$

следует, что для каждого фиксированного $n (n=1, 2, \dots)$

$$u_{n,k}(t) \xrightarrow{C^{(l)}([0, T])} u_{n,0}(t) \text{ при } k \rightarrow \infty,$$

то из компактности множества $\mathcal{M}$ в $B_{\beta_0, \dots, \beta_\ell, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_\ell}$ следует, что для каждого фиксированного $n (n = 1, 2, \dots)$ множество $\mathcal{M}_n$ компактно в $C^{(\alpha)}([0, T])$. Следовательно, для множества $\mathcal{M}$ выполнено условие а) данной теоремы. Далее, пусть $\varepsilon > 0$ — любое заданное число. Так как, по предположению, множество $\mathcal{M}$ компактно в $B_{\beta_0, \dots, \beta_\ell, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_\ell}$, то для него существует в $B_{\beta_0, \dots, \beta_\ell, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_\ell}$ конечная $\frac{\varepsilon}{2}$ — сеть:

$$u_k(t, x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,k}(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x (k = 1, \dots, m_\varepsilon), \quad (1.15)$$

г.е. для каждого $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \in \mathcal{M}$ существует номер $k_u (1 \leq k_u \leq m_\varepsilon)$, такой, что

$$\|u - u_{k_u}\|_{B_{\beta_0, \dots, \beta_\ell, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_\ell}} \equiv \sum_{i=0}^{\ell} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(i)}(t) - u_{n,k_u}^{(i)}(t)| \right)^{\beta_i} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.16)$$

Так как функции (1.15) принадлежат пространству $B_{\beta_0, \dots, \beta_\ell, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_\ell}$ и их число конечно, то, как видно из определения нормы (1.5), существует номер N_ε , такой, что

$$\sum_{i=0}^{\ell} \left\{ \sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty} \left(n^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(i)}(t)| \right)^{\beta_i} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (k = 1, \dots, m_\varepsilon). \quad (1.17)$$

Тогда из (1.16) и (1.17) следует, что для каждого $u(t, x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \in \mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\ell} \left\{ \sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty} \left(n^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(i)}(t)| \right)^{\beta_i} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}} \leq \\ & \leq \sum_{i=0}^{\ell} \left\{ \sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty} \left(n^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(i)}(t) - u_{n,k_u}^{(i)}(t)| \right)^{\beta_i} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=0}^l \left\{ \sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty} \left(n^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(i)}(t)| \right)^{\beta_i} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}} < \varepsilon,$$

т.е. для множества $\mathcal{M}$ выполнено условие б) данной теоремы. Таким образом, необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для множества $\mathcal{M} \subset B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}$ выполнены условия а) и б) данной теоремы. Для каждой функции

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \in \mathcal{M} \text{ примем обозначение}$$

$$u_\varepsilon(t, x) = \sum_{n=1}^{N_\varepsilon-1} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x,$$

причём, не нарушая общности, будем считать, что $N_\varepsilon \geq 2$. Совокупность всех этих функций $u_\varepsilon(t, x)$ обозначим через $\mathcal{M}_\varepsilon$. Очевидно, что $\mathcal{M}_\varepsilon \subset B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}$ и, в силу предположения а), множество $\mathcal{M}_\varepsilon$ компактно в $B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}$. По построению и в силу предположе-

ния б), для каждой $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \in \mathcal{M}$

$$\|u - u_\varepsilon\|_{B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}} = \sum_{i=0}^l \left\{ \sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty} \left(n^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(i)}(t)| \right)^{\beta_i} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}} < \varepsilon.$$

Таким образом, множество $\mathcal{M}_\varepsilon \subset B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}$ образует для множества $\mathcal{M} \subset B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}$ компактную ε -сеть. Тогда, в силу одного из следствий известной теоремы Хаусдорфа о критерии компактности множеств в метрических пространствах, множество $\mathcal{M}$ компактно в $B_{\beta_0, \dots, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_l}$. Достаточность доказана.

Таким образом, теорема доказана полностью.

Из теоремы 1.1, в частности, следует, что все вложения

$$B_{\beta_0, \dots, \beta_{l-1}, \beta_l, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_{l-1}, \alpha_l} \subset B_{\beta_0, \dots, \beta_{l-1}, T}^{\alpha_0 - \varepsilon_0, \dots, \alpha_{l-1} - \varepsilon_{l-1}}$$

$$(\ell \geq 1; \alpha_i > 0, \varepsilon_i > 0, \alpha_i - \varepsilon_i \geq 0 \ (i = \overline{0, \ell-1}), \alpha_\ell \geq 0)$$

вполне непрерывны.

2. Введём следующие определения:

Определение 1.1. Обобщённым решением задачи (1.1)-(1.3) назовём функцию $u(t, x)$, принадлежащую пространству $B_{2,2,T}^{2,1}$, принимающую начальные значения (1.2) в обычном смысле и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_0^T \int_0^\ell \left\{ u_t(t, x) \cdot V_t(t, x) - \alpha u_{xx}(t, x) \cdot V_t(t, x) + \mathcal{F}(u(t, x)) \cdot V(t, x) \right\} dx dt - \\ - \alpha \int_0^\ell \varphi''(x) \cdot V(0, x) dx + \int_0^\ell \psi(x) \cdot V(0, x) dx = 0 \quad (1.18)$$

для любых функций $V(t, x)$, обладающих свойствами: $V(T, x) = 0$ для почти всех $x \in [0, \ell]$, $V(0, x) \in L_2(0, \ell)$, $V(t, x) \in L_2(\mathcal{D}_T)$, $\|V_t(t, x)\|_{L_2(0, \ell)} \in L(0, T)$, и интегральному тождеству

$$\int_0^T \int_0^\ell \left\{ u_t(t, x) \cdot V_t(t, x) - \alpha u_{xx}(t, x) \cdot V_x(t, x) + \right. \\ \left. + \mathcal{F}(u(t, x)) \cdot V(t, x) \right\} \cdot dx dt + \int_0^\ell \psi(x) \cdot V(0, x) dx = 0 \quad (1.19)$$

для любых функций $V(t, x)$, обладающих свойствами: $V(T, x) = 0$ для почти всех $x \in [0, \ell]$, $V(t, 0) = V(t, \ell) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$, $V(0, x) \in L_2(0, \ell)$, $V(t, x) \in L_2(\mathcal{D}_T)$ и $V_t(t, x) \in L(\mathcal{D}_T)$, где $\mathcal{D}_T \equiv [0, T] \times [0, \ell]$.

Замечание 1.1. Как видно из структуры пространства $B_{2,2,T}^{2,1}$, для любой функции $u(t, x) \in B_{2,2,T}^{2,1}$:

$$u(t, x) \in C(\mathcal{D}_T), u_t(t, x) \in C(\mathcal{D}_T), u_x(t, x) \in C(\mathcal{D}_T), \\ u_{xx}(t, x) \in C([0, T]; L_2(0, \ell)), u_{xt}(t, x) \in C([0, T]; L_2(0, \ell)).$$

Кроме того, очевидно, что $\forall u(t, x) \in B_{2,2,T}^{2,1}$:

$$u(t, 0) = u(t, \ell) = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Поэтому обобщённое решение $u(t, x)$ задачи (1.1)-(1.3) удовлетворяет не только начальным условиям (1.2), но и граничным условиям (1.3) в обычном смысле.

Определение 1.2. Решением почти всюду задачи (1.1)-(1.3) назовём функцию $u(t, x)$, непрерывную в замкнутой области $\mathcal{D}_T = [0, T] \times [0, \ell]$ вместе с производными $u_t(t, x)$, $u_x(t, x)$, $u_{tx}(t, x)$ и $u_{xx}(t, x)$, имеющую производные $u_{tt}(t, x)$ и $u_{txx}(t, x)$ принадлежащие пространству $L_2(\mathcal{D}_T)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) почти всюду в $\mathcal{D}_T$ и принимающую значения (1.2) и (1.3) в обычном смысле.

Определение 1.3. Классическим решением задачи (1.1)-(1.3) назовём функцию $u(t, x)$, непрерывную в замкнутой области $\mathcal{D}_T$ вместе со своими производными $u_t(t, x)$, $u_x(t, x)$, $u_{tt}(t, x)$, $u_{tx}(t, x)$, $u_{xx}(t, x)$, $u_{txx}(t, x)$ и удовлетворяющую всем условиям (1.1)-(1.3) в обычном смысле.

3. Примем следующие обозначения:

Обозначим через E_{x^0} пространство $L_2(\mathcal{D}_T)$.

Обозначим через E_{x^1} совокупность всех функций $u(t, x)$, непрерывных в замкнутой области $\mathcal{D}_T$, имеющих производную $u_x(t, x) \in L_2(\mathcal{D}_T)$ и удовлетворяющих условиям (1.3), с нормой

$$\|u(t, x)\|_{E_{x^1}} = \|u(t, x)\|_{C(\mathcal{D}_T)} + \|u_x(t, x)\|_{L_2(\mathcal{D}_T)}.$$

Обозначим через E_{x^2} совокупность всех функций $u(t, x)$, непрерывных в замкнутой области $\mathcal{D}_T$ вместе с производной $u_x(t, x)$, имеющих производную $u_{xx}(t, x) \in L_2(\mathcal{D}_T)$ и удовлетворяющих условиям (1.3), с нормой

$$\|u(t, x)\|_{E_{x^2}} = \|u(t, x)\|_{C(\mathcal{D}_T)} + \|u_x(t, x)\|_{C(\mathcal{D}_T)} + \|u_{xx}(t, x)\|_{L_2(\mathcal{D}_T)}.$$

Легко видеть, что все эти пространства банаховы.

Далее, обозначим через G_1 класс всех функций $u(t, x)$, для которых $u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tx}(t, x), u_{xx}(t, x) \in C(\mathcal{D}_T), u_{tt}(t, x),$

$u_{txx}(t, x) \in L_2(\mathcal{D}_T)$ и $\forall t \in [0, T]$ $u(t, 0) = u(t, \ell) = 0$.

А через G_2 обозначим класс всех функций $u(t, x)$, для которых $u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tt}(t, x), u_{tx}(t, x), u_{xx}(t, x), u_{txx}(t, x) \in C(\mathcal{D}_T)$ и $\forall t \in [0, T]$ $u(t, 0) = u(t, \ell) = 0$.

4. Очевидно, что каждое обобщённое (и тем более, почти всюду и классическое) решение задачи (1.1)-(1.3) имеет вид:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad (1.20)$$

где $u_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} u(t, x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx$ - коэффициенты Фурье решения

$u(t, x)$ по полной в $L_2(0, \ell)$ системе $\left\{ \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right\}_{n=1}^{\infty}$.

Легко видеть, что после формального применения схемы метода Фурье нахождение функций $u_n(t)$ сводится к решению следующей счётной системы нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода:

$$u_n(t) = \varphi_n + \frac{\ell^2}{\alpha n^2 \pi^2} \left[1 - \exp \left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t \right) \right] \psi_n + \frac{2\ell}{\alpha n^2 \pi^2} \int_0^t \int_0^{\ell} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau) \right] \right\} \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau \quad (n = \overline{1, \infty}; t \in [0, T]), \quad (1.21)$$

где

$$\varphi_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx, \quad \psi_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx.$$

Из системы (1.21) легко получить, что

$$u'_n(t) = \exp \left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t \right) \psi_n + \frac{2}{\ell} \int_0^t \int_0^{\ell} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \exp \left[-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau) \right] \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau, \quad (1.21a)$$

$$u_n''(t) = -\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} \exp\left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t\right) \psi_n - \frac{2\alpha n^2 \pi^2}{\ell^3} \int_0^t \int_0^1 \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi \cdot \\ \cdot \exp\left[-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t-\tau)\right] d\xi d\tau + \frac{2}{\ell} \int_0^t \mathcal{F}(u(t, \xi)) \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi. \quad (1.21_6)$$

В этой главе нам придется наряду с системой (1.21) исследовать следующую систему, получаемую из системы (1.21) путём интегрирования по частям по ξ один раз в её правой части, при предположении, что $\mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \in E_1$:

$$u_n(t) = \varphi_n - \frac{\ell^2}{\alpha n^2 \pi^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t\right) \right] \psi_n + \frac{2\ell^2}{\alpha n^3 \pi^3} \int_0^t \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \\ \cdot \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t-\tau)\right] \right\} \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau \quad (n=1, 2, \dots; t \in [0, T]). \quad (1.22)$$

Из системы (1.22) легко получить, что:

$$u_n'(t) = \exp\left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t\right) \psi_n + \frac{2}{n\pi} \int_0^t \int_0^1 \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \\ \cdot \exp\left[-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t-\tau)\right] \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau, \quad (1.22a)$$

$$u_n''(t) = -\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} \exp\left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t\right) \psi_n - \frac{2\alpha n\pi}{\ell^2} \int_0^t \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \\ \cdot \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi \cdot \exp\left[-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t-\tau)\right] d\xi d\tau + \frac{2}{n\pi} \int_0^t \frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{F}(u(t, \xi)) \cdot \\ \cdot \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi = -\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} \exp\left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t\right) \psi_n - \\ - \frac{2\alpha n\pi}{\ell^2} \int_0^t \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \cdot$$

$$\cdot \exp\left[-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right] d\xi d\tau + \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \mathcal{F}(u(t, \xi)) \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi. \quad (1.22_6)$$

Будем пользоваться ещё следующей системой, получаемой из системы (1.21) путём интегрирования по частям по ξ два раза в её правой части, при предположении $\mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \in E_{x^2}$:

$$\begin{aligned} u_n(t) = & \varphi_n + \frac{\ell^2}{\alpha n^2 \pi^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t\right) \right] \psi_n - \\ & - \frac{2\ell^3}{\alpha n^4 \pi^4} \int_0^\ell \int_0^\ell \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right] \right\} \cdot \\ & \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau (n=1,2,\dots; t \in [0, T]). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Из системы (1.23) легко получить, что:

$$\begin{aligned} u'_n(t) = & \exp\left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t\right) \psi_n - \frac{2\ell}{n^2 \pi^2} \cdot \\ & \cdot \int_0^\ell \int_0^\ell \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \exp\left[-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right] \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (1.23a)$$

$$\begin{aligned} u''_n(t) = & -\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} \exp\left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t\right) \psi_n + \frac{2\alpha}{\ell} \int_0^\ell \int_0^\ell \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \\ & \cdot \exp\left[-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right] \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau - \frac{2\ell}{n^2 \pi^2} \int_0^\ell \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathcal{F}(u(t, \xi)) \cdot \\ & \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi = -\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} \exp\left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t\right) \psi_n + \frac{2\alpha}{\ell} \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \int_0^t \int_0^\ell \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \exp \left[-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau) \right] \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau + \\ & + \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \mathcal{F}(u(t, \xi)) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi. \end{aligned} \quad (1.23_6)$$

Исходя из определения обобщённого решения задачи (1.1)-(1.3), доказывается следующая

Лемма 1.1. Если $u(t, x)$ является обобщённым решением задачи (1.1)-(1.3) и $\mathcal{F}(u(t, x)) \in L(\mathcal{D}_T)$, то функции

$u_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell u(t, x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx$, т.е. коэффициенты Фурье функции

$u(t, x)$ по системе $\left\{ \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right\}_{n=1}^\infty$, удовлетворяют на $[0, T]$ счётной системе (1.21).

Доказательство. Так как функция $u(t, x)$ является обобщённым решением задачи (1.1)-(1.3), то, в частности, она удовлетворяет интегральному тождеству (1.18) для любой функции $V(t, x)$ вида

$$V(t, x) = \begin{cases} \frac{2}{\ell} (t - \tau) \sin \frac{n\pi}{\ell} x & \text{при } 0 \leq t \leq \tau, x \in [0, \ell], \\ 0 & \text{при } \tau < t \leq T, x \in [0, \ell], \end{cases}$$

где $n = 1, \infty$; $\tau \in [0, T]$.

Подставив эту функцию $V(t, x)$ в тождество (1.18), получаем, что для любых $(n = 1, \infty)$ и $\tau \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \left\{ u'_n(t) - \alpha \int_0^\ell u_{xx}(t, x) \frac{2}{\ell} \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx + (t - \tau) \int_0^\ell \mathcal{F}(u(t, x)) \cdot \right. \\ & \left. \cdot \frac{2}{\ell} \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx \right\} dt + \alpha \tau \int_0^\ell \varphi''(x) \frac{2}{\ell} \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx - \end{aligned}$$

$$-\tau \int_0^{\ell} \psi(x) \frac{2}{\ell} \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx = 0.$$

Из последнего тождества, пользуясь соотношениями

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell} u_{xx}(t, x) \frac{2}{\ell} \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx &= -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \int_0^{\ell} u(t, x) \frac{2}{\ell} \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 u_n(t), \\ \int_0^{\ell} \varphi''(x) \frac{2}{\ell} \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx &= -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \varphi_n, \quad \int_0^{\ell} \psi(x) \frac{2}{\ell} \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx = \psi_n, \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_n(u; t) \equiv \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \mathcal{F}(u(t, x)) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx,$$

получаем:

$$\int_0^{\tau} \left\{ u'_n(t) + \alpha \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 u_n(t) + (t - \tau) \mathcal{F}_n(u; t) \right\} dt - \alpha \tau \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 \varphi_n - \tau \cdot \psi_n = 0.$$

Дифференцируя последнее тождество по τ два раза, получаем:

$$u'_n(\tau) + \alpha \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 u_n(\tau) - \int_0^{\tau} \mathcal{F}_n(u; t) dt - \alpha \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 \varphi_n - \psi_n = 0,$$

$$u''_n(\tau) + \alpha \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 u'_n(\tau) - \mathcal{F}_n(u; \tau) = 0.$$

Таким образом, для определения функций $u_n(\tau)$ получаем счётную систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка

$$u''_n(\tau) + \alpha \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 u'_n(\tau) = \mathcal{F}_n(u; \tau)$$

почти для всех $\tau \in [0, T]$, с начальными условиями $u_n(0) = \varphi_n$, $u'_n(0) = \psi_n$; а эта последняя задача Коши очевидно, что эквивалентна системе (1.21).

Совершенно аналогично лемме 1.1, легко доказывается следующая

Лемма 1.2. Если $u(t, x)$ является решением почти всюду (и тем более, классическим решением) задачи (1.1)-(1.3), то функции

$$u_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell u(t, x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx$$

удовлетворяют на $[0, T]$ счётной системе (1.21).

5. В дальнейшем часто будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0(u(t, x)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\ell}{\alpha n^2 \pi^2} \int_0^t \int_0^\ell u(\tau, \xi) \left[1 - \ell \frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t-\tau) \right] \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau \cdot \\ &\cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1(u(t, x)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\ell^2}{\alpha n^3 \pi^3} \int_0^t \int_0^\ell u(\tau, \xi) \left[1 - \ell \frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t-\tau) \right] \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau \cdot \\ &\cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2(u(t, x)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\ell^3}{\alpha n^4 \pi^4} \int_0^t \int_0^\ell u(\tau, \xi) \left[1 - \ell \frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t-\tau) \right] \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau \cdot \\ &\cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} x. \end{aligned} \quad (1.26)$$

§2. Исследование единственности решений задачи(1.1)-(1.3).

В этом параграфе устанавливаются теоремы единственности обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (1.1)-(1.3).

Теорема 1.2. Пусть

1. Для каждого $u(t, x) \in B_{2,2,T}^{2,1}$ $\mathcal{F}(u(t, x)) \in L_2(\mathcal{D}_T)$.

Для любых $u(t, x), v(t, x) \in B_{2,2,T}^{2,1}$ и $\forall t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(u(t, x)) - \mathcal{F}(v(t, x))\|_{L_2(0, \ell)} &\leq a_{1,u,v}(t) \|u - v\|_{B_{2,1}^0} + \\ &+ a_{2,u,v}(t) \|u - v\|_{B_{2,1}^1} + a_{3,u,v}(t) \|u - v\|_{B_{2,1}^2} + a_{4,u,v}(t) \|u - v\|_{B_{2,1}^{2,0}} + \\ &+ a_{5,u,v}(t) \|u - v\|_{B_{2,1}^{2,1}}, \end{aligned} \quad (1.27)$$

где для каждого $t_0 \in [0, T)$ существует такое $\delta(t_0)$ $0 < \delta(t_0) \leq T - t_0$, что

$$\begin{aligned} (t - t_0)^3 a_{1,u,v}(t), \quad (t - t_0) a_{2,u,v}(t), \quad (t - t_0)^2 a_{3,u,v}(t), \\ (t - t_0)^2 a_{4,u,v}(t), \quad a_{5,u,v}(t) \in L_2(t_0, t_0 + \delta(t_0)). \end{aligned}$$

Тогда задача (1.1)-(1.3) не может иметь более одного обобщённого решения.

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть задача (1.1)-(1.3) имеет по крайней мере два различных обобщённых решения

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad \text{и} \quad v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$$

По определению обобщённого решения задачи (1.1)-(1.3) $(t, x), v(t, x) \in B_{2,2,T}^{2,1}$. В силу леммы 1.1 каждая из последовательностей $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{g_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет на $[0, T]$ системе (1.21). Примем следующее обозначение:

$$t_0 \equiv \max \left\{ t : t \in [0, T], \|u - v\|_{B_{2,1}^{2,1}} = 0 \right\}.$$

По предположению $0 \leq t_0 < T$, ибо в случае $t_0 = T$ получили бы $\|u - v\|_{B_{2,1}^{2,1}} = 0$, т.е. $u = v$, что противоречило бы предположению.

По определению числа t_0 $\|u - v\|_{B_{2,1}^{2,1}} = 0$. Отсюда, в силу структуры пространства $B_{2,2,T}^{2,1}$, следует, что $\forall t \in [0, t_0]$ $u - v|_{B_{2,1}^{2,1}} = 0$ и, следовательно, $\forall t \in [0, t_0]$:

$$u - v|_{B_{2,1}^0} = u - v|_{B_{2,1}^1} = u - v|_{B_{2,1}^2} = u - v|_{B_{2,1}^{2,0}} = u - v|_{B_{2,1}^{2,1}} = 0.$$

Тогда из (1.27) видно, что $\forall t \in [0, t_0] \|\mathcal{F}(u(t, x)) - \mathcal{F}(v(t, x))\|_{L_2(0, \ell)} = 0$, т.е. при любом фиксированном $t \in [0, t_0]$ для почти всех $x \in [0, \ell]$ $\mathcal{F}(u(t, x)) = \mathcal{F}(v(t, x))$. Учитывая это, из системы (1.21) получаем, что $\forall n (n=1, \infty)$ и $\forall t \in [t_0, T]$:

$$|u_n(t) - \mathcal{G}_n(t)|^2 \leq \frac{4\ell^2}{\alpha^2 n^4 \pi^4} \int_{t_0}^t \left\{ \int_0^\ell [\mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \mathcal{F}(v(\tau, \xi))] \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right\}^2 d\tau \cdot$$

$$\cdot \int_{t_0}^t \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau) \right] \right\}^2 d\tau \leq \frac{4\ell^2}{\alpha^2 n^4 \pi^4} \int_{t_0}^t \left\{ \int_0^\ell [\mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \mathcal{F}(v(\tau, \xi))] \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right\}^2 d\tau \cdot \int_{t_0}^t \left(\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} \right)^2 (t - \tau)^2 d\tau =$$

$$= \frac{4(t - t_0)^3}{3\ell^2} \int_{t_0}^t \left\{ \int_0^\ell [\mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \mathcal{F}(v(\tau, \xi))] \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right\}^2 d\tau, \quad (1.28)$$

$$(n \cdot |u_n(t) - \mathcal{G}_n(t)|)^2 \leq \frac{4\ell^2}{\alpha^2 n^2 \pi^4} \int_{t_0}^t \left\{ \int_0^\ell [\mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \mathcal{F}(v(\tau, \xi))] \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right\}^2 d\tau \cdot \int_{t_0}^t \frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau) \cdot 1 d\tau = \frac{2(t - t_0)^2}{\alpha \pi^2} \cdot$$

$$\cdot \int_{t_0}^t \left\{ \int_0^\ell [\mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \mathcal{F}(v(\tau, \xi))] \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right\}^2 d\tau, \quad (1.29)$$

$$(n^2 \cdot |u_n(t) - \mathcal{G}_n(t)|)^2 \leq \frac{4\ell^2}{\alpha^2 \pi^4} \int_{t_0}^t \left\{ \int_0^\ell [\mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \mathcal{F}(v(\tau, \xi))] \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right\}^2 d\tau \cdot$$

$$\cdot \int_{t_0}^t 1 d\tau = \frac{4\ell^2(t - t_0)}{\alpha^2 \pi^4} \cdot \int_{t_0}^t \left\{ \int_0^\ell [\mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \mathcal{F}(v(\tau, \xi))] \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right\}^2 d\tau, \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned}
 |u'_n(t) - \mathcal{G}'_n(t)|^2 &\leq \frac{4}{\ell^2} \int_{t_0}^t \left\{ \int_0^\ell [\mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \mathcal{F}(v(\tau, \xi))] \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right\}^2 d\tau \cdot \\
 &\cdot \int_{t_0}^t \exp \left[-\frac{2\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau) \right] d\tau \leq \frac{4(t - t_0)}{\ell^2} \int_{t_0}^t \left\{ \int_0^\ell [\mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \right. \\
 &\left. - \mathcal{F}(v(\tau, \xi))] \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right\}^2 d\tau, \quad (1.31)
 \end{aligned}$$

$$\left(n \cdot |u'_n(t) - \mathcal{G}'_n(t)| \right)^2 \leq \frac{2}{\alpha \pi^2} \int_{t_0}^t \left\{ \int_0^\ell [\mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \mathcal{F}(v(\tau, \xi))] \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right\}^2 d\tau. \quad (1.32)$$

По определению числа t_0 для любых n ($n = 1, 2, \dots$) и $t \in [t_0, T]$ $u_n(t) = \mathcal{G}_n(t)$ и $u'_n(t) = \mathcal{G}'_n(t)$. Учитывая это, из неравенства (1.28) получаем, что $\forall t \in [t_0, T]$:

$$\begin{aligned}
 \|u - v\|_{B_{2,\ell}^0}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\max_{0 \leq \tau \leq t} |u_n(\tau) - \mathcal{G}_n(\tau)| \right)^2 \leq \frac{4(t - t_0)^3}{3\ell^2} \cdot \int_{t_0}^t \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^\ell [\mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \right. \\
 &\left. - \mathcal{F}(v(\tau, \xi))] \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right\}^2 d\tau = \frac{4}{3\ell^2} \cdot \frac{\ell}{2} (t - t_0)^3 \int_{t_0}^t \int_0^\ell [\mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \\
 &- \mathcal{F}(v(\tau, \xi))]^2 d\xi d\tau = \frac{2(t - t_0)^3}{3\ell} \int_{t_0}^t \|\mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \mathcal{F}(v(\tau, \xi))\|_{L_2(0,\ell)}^2 d\tau \leq \\
 &\leq \frac{2(t - t_0)^3}{3\ell} \|\mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \mathcal{F}(v(\tau, \xi))\|_{L_2(D_T)}^2. \quad (1.33)
 \end{aligned}$$

Аналогично, из неравенств (1.29)-(1.32) соответственно получаем, что $\forall t \in [t_0, T]$:

$$\|u - v\|_{B_{2,t}^1}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n \cdot \max_{0 \leq \tau \leq t} |u_n(\tau) - \vartheta_n(\tau)| \right)^2 \leq \frac{\ell(t-t_0)^2}{2\alpha\pi^2} \cdot \int_{t_0}^t \|\mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \mathcal{F}(v(\tau, \xi))\|_{L_2(0, \ell)}^2 d\tau \leq \frac{\ell(t-t_0)^2}{2\alpha\pi^2} \cdot \|\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(v)\|_{L_2(\mathcal{D}_T)}^2, \quad (1.34)$$

$$\|u - v\|_{B_{2,t}^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 \cdot \max_{0 \leq \tau \leq t} |u_n(\tau) - \vartheta_n(\tau)| \right)^2 \leq \frac{2\ell^3(t-t_0)^2}{\alpha^2\pi^4} \int_{t_0}^t \|\mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \mathcal{F}(v(\tau, \xi))\|_{L_2(0, \ell)}^2 d\tau \leq \frac{\ell^3(t-t_0)^2}{\alpha^2\pi^4} \|\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(v)\|_{L_2(\mathcal{D}_T)}^2, \quad (1.35)$$

$$\|u_t - v_t\|_{B_{2,t}^0}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\max_{0 \leq \tau \leq t} |u'_n(\tau) - \vartheta'_n(\tau)| \right)^2 \leq \frac{2(t-t_0)}{\ell} \int_{t_0}^t \|\mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \mathcal{F}(v(\tau, \xi))\|_{L_2(0, \ell)}^2 d\tau \leq \frac{2(t-t_0)}{\ell} \|\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(v)\|_{L_2(\mathcal{D}_T)}^2, \quad (1.36)$$

$$\|u_t - v_t\|_{B_{2,t}^1}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n \cdot \max_{0 \leq \tau \leq t} |u'_n(\tau) - \vartheta'_n(\tau)| \right)^2 \leq \frac{\ell}{\alpha\pi^2} \int_{t_0}^t \|\mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \mathcal{F}(v(\tau, \xi))\|_{L_2(0, \ell)}^2 d\tau \leq \frac{\ell}{\alpha\pi^2} \|\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(v)\|_{L_2(\mathcal{D}_T)}^2. \quad (1.37)$$

Из неравенств (1.35)-(1.37) $\forall t \in [0, T]$ имеем:

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{B_{2,t}^{2,0}}^2 &= (\|u - v\|_{B_{2,t}^2} + \|u_t - v_t\|_{B_{2,t}^0})^2 \leq 2(\|u - v\|_{B_{2,t}^2}^2 + \\ &+ \|u_t - v_t\|_{B_{2,t}^0}^2) \leq 2 \left[\frac{2\ell^3(t-t_0)^2}{\alpha^2\pi^4} \int_{t_0}^t \|\mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \mathcal{F}(v(\tau, \xi))\|_{L_2(0, \ell)}^2 d\tau + \right. \\ &\left. + \frac{2}{\ell}(t-t_0) \int_{t_0}^t \|\mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \mathcal{F}(v(\tau, \xi))\|_{L_2(0, \ell)}^2 d\tau \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4(\ell^4 + \alpha^2 \pi^4)}{\alpha^2 \pi^4 \ell} (t - t_0) \int_{t_0}^t \|\mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \mathcal{F}(v(\tau, \xi))\|_{L_2(0, \ell)}^2 d\tau \leq \\
&\leq \frac{4(\ell^4 + \alpha^2 \pi^4)}{\alpha^2 \pi^4 \ell} (t - t_0) \|\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(v)\|_{L_2(\mathcal{D}_T)}^2, \tag{1.38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|u - v\|_{B_{2,2,\ell}^{2,1}}^2 &= (\|u - v\|_{B_{2,\ell}^2} + \|u_t - v_t\|_{B_{2,\ell}^1})^2 \leq 2(\|u - v\|_{B_{2,\ell}^2}^2 + \|u_t - v_t\|_{B_{2,\ell}^1}^2) \leq \\
&\leq 2 \left[\frac{2\ell^3(t - t_0)}{\alpha^2 \pi^4} + \frac{\ell}{\alpha \pi^2} \right] \cdot \int_{t_0}^t \|\mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \mathcal{F}(v(\tau, \xi))\|_{L_2(0, \ell)}^2 d\tau = \\
&= \frac{2\ell[2\ell^2(t - t_0) + \alpha \pi^2]}{\alpha^2 \pi^4} \int_{t_0}^t \|\mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \mathcal{F}(v(\tau, \xi))\|_{L_2(0, \ell)}^2 d\tau \leq \\
&\leq \frac{2\ell(2\ell^2 T + \alpha \pi^2)}{\alpha^2 \pi^4} \int_{t_0}^t \|\mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \mathcal{F}(v(\tau, \xi))\|_{L_2(0, \ell)}^2 d\tau \leq \\
&\leq \frac{2\ell(2\ell^2 T + \alpha \pi^2)}{\alpha^2 \pi^4} \|\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(v)\|_{L_2(\mathcal{D}_T)}^2. \tag{1.39}
\end{aligned}$$

Для любого δ ($0 < \delta \leq \delta(t_0)$) примем обозначения:

$$\sup_{t \in (t_0, t_0 + \delta)} \left\{ (t - t_0)^{-3} \cdot \|u - v\|_{B_{2,\ell}^0}^2 \right\} \equiv A_{1,\delta} < +\infty, \tag{1.40}$$

$$\sup_{t \in (t_0, t_0 + \delta)} \left\{ (t - t_0)^{-2} \cdot \|u - v\|_{B_{2,\ell}^1}^2 \right\} \equiv A_{2,\delta} < +\infty, \tag{1.41}$$

$$\sup_{t \in (t_0, t_0 + \delta)} \left\{ (t - t_0)^{-1} \cdot \|u - v\|_{B_{2,\ell}^2}^2 \right\} \equiv A_{3,\delta} < +\infty, \tag{1.42}$$

$$\sup_{t \in (t_0, t_0 + \delta)} \left\{ (t - t_0)^{-1} \cdot \|u - v\|_{B_{2,2,\ell}^{2,0}}^2 \right\} \equiv A_{4,\delta} < +\infty, \tag{1.43}$$

$$\sup_{t \in (t_0, t_0 + \delta)} \left\{ \|u - v\|_{B_{2,2,\ell}^{2,1}}^2 \right\} \equiv A_{5,\delta} < +\infty. \tag{1.44}$$

Пользуясь обозначениями (1.40)-(1.44) и неравенством (1.27), из оценки (1.33) получаем, что при любом δ ($0 < \delta \leq \delta(t_0)$)

$\forall t \in (t_0, t_0 + \delta)$:

$$\begin{aligned}
(t-t_0)^{-3} \|u-v\|_{B_{2,t}^0}^2 &\leq \frac{2}{3\ell} \int_{t_0}^t \|\mathcal{F}(u(\tau, x)) - \mathcal{F}(v(\tau, x))\|_{L_2(o, \ell)}^2 d\tau \leq \\
&\leq \frac{10}{3\ell} \int_{t_0}^t [a_{1,u,v}^2(\tau) \|u-v\|_{B_{2,t}^0}^2 + a_{2,u,v}^2(\tau) \|u-v\|_{B_{2,t}^1}^2 + a_{3,u,v}^2(\tau) \|u-v\|_{B_{2,t}^2}^2 + \\
&+ a_{4,u,v}^2(\tau) \|u-v\|_{B_{2,t}^{2,1}}^2 + a_{5,u,v}^2(\tau) \|u-v\|_{B_{2,t}^{2,2}}^2] d\tau = \\
&= \frac{10}{3\ell} \int_{t_0}^t \{ (\tau-t_0)^3 a_{1,u,v}^2(\tau) \cdot [(\tau-t_0)^{-3} \cdot \|u-v\|_{B_{2,t}^0}^2] + \\
&+ (\tau-t_0)^2 a_{2,u,v}^2(\tau) [(\tau-t_0)^{-2} \cdot \|u-v\|_{B_{2,t}^1}^2] + (\tau-t_0)^2 \cdot a_{3,u,v}^2(\tau) \cdot \\
&\cdot [(\tau-t_0)^{-1} \cdot \|u-v\|_{B_{2,t}^2}^2] + (\tau-t_0) \cdot a_{4,u,v}^2(\tau) [(\tau-t_0)^{-1} \cdot \|u-v\|_{B_{2,t}^{2,0}}^2] + \\
&+ a_{5,u,v}^2(\tau) \cdot \|u-v\|_{B_{2,t}^{2,1}}^2 \} d\tau \leq \frac{10}{3\ell} \int_{t_0}^t [A_{1,\delta} \cdot (\tau-t_0)^3 a_{1,u,v}^2(\tau) + \\
&+ A_{2,\delta} \cdot (\tau-t_0)^2 a_{2,u,v}^2(\tau) + A_{3,\delta} \cdot (\tau-t_0) a_{3,u,v}^2(\tau) + \\
&+ A_{4,\delta} \cdot (\tau-t_0) a_{4,u,v}^2(\tau) + A_{5,\delta} \cdot a_{5,u,v}^2(\tau)] d\tau \leq \frac{10}{3\ell} (A_{1,\delta} + \dots + A_{5,\delta}) \cdot \\
&\cdot \int_{t_0}^t [(\tau-t_0)^3 a_{1,u,v}^2(\tau) + (\tau-t_0)^2 a_{2,u,v}^2(\tau) + (\tau-t_0) a_{3,u,v}^2(\tau) + \\
&+ (\tau-t_0) a_{4,u,v}^2(\tau) + a_{5,u,v}^2(\tau)] d\tau. \tag{1.45}
\end{aligned}$$

Если обозначить $\mathcal{A}(\delta) = \mathcal{A}_{1,\delta} + \dots + \mathcal{A}_{5,\delta}$ и

$$\begin{aligned}
H(\delta) = &\int_{t_0}^{t_0+\delta} [(\tau-t_0)^3 \cdot a_{1,u,v}^2(\tau) + (\tau-t_0)^2 \cdot a_{2,u,v}^2(\tau) + \\
&+ (\tau-t_0) \cdot a_{3,u,v}^2(\tau) + (\tau-t_0) \cdot a_{4,u,v}^2(\tau) + a_{5,u,v}^2(\tau)] d\tau,
\end{aligned}$$

то получим, что при любом $\delta (0 < \delta \leq \delta(t_0)) \quad \forall t \in (t_0, t_0 + \delta)$:

$$(t-t_0)^{-3} \cdot \|u-v\|_{B_{2,t}^0}^2 \leq \frac{10}{3\ell} \mathcal{A}(\delta) H(\delta). \tag{1.46}$$

Так как в неравенстве (1.46) правая часть от t не зависит, то левая часть в интервале $(t_0, t_0 + \delta)$ ограничена. Тогда, пользуясь обозначением (1.40), из (1.46) получаем:

$$A_{1,\delta} \leq \frac{10}{3\ell} \cdot \mathcal{A}(\delta) \cdot H(\delta). \quad (1.47)$$

Аналогично, из оценок (1.34), (1.35), (1.38) и (1.39) получаем, что $\forall \delta \ (0 < \delta \leq \delta(t_0))$:

$$\mathcal{A}_{2,\delta} \leq \frac{5\ell}{2\alpha\pi^2} \cdot \mathcal{A}(\delta)H(\delta), \quad \mathcal{A}_{3,\delta} \leq \frac{10}{3\ell} \cdot \mathcal{A}(\delta)H(\delta), \quad (1.48)$$

$$\mathcal{A}_{4,\delta} \leq \frac{20(\ell^4 + \alpha^2\pi^4)}{\alpha^2\pi^4\ell} \cdot \mathcal{A}(\delta)H(\delta), \quad \mathcal{A}_{5,\delta} \leq \frac{10\ell^3}{\alpha^2\pi^4} \cdot \mathcal{A}(\delta)H(\delta). \quad (1.49)$$

Складывая неравенства (1.47)-(1.49), получаем:

$$\mathcal{A}(\delta) \leq \frac{5(28\alpha^2\pi^4 + 15\alpha\pi^2\ell^2 + 60\ell^4)}{6\alpha^2\pi^4\ell} \cdot \mathcal{A}(\delta) \cdot H(\delta). \quad (1.50)$$

Если число $\delta = \delta^* (0 < \delta^* \leq \delta(t_0) \leq T - t_0)$ выбрать и фиксировать так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{5(28\alpha^2\pi^4 + 15\alpha\pi^2\ell^2 + 60\ell^4)}{6\alpha^2\pi^4\ell} H(\delta^*) < 1$$

(это возможно по теореме Лебега об абсолютной непрерывности интеграла Лебега), то из неравенства (1.50) получим:

$$\mathcal{A}(\delta^*) = \mathcal{A}_{1,\delta^*} + \dots + \mathcal{A}_{5,\delta^*} = 0.$$

Следовательно,

$$\mathcal{A}_{1,\delta^*} = \dots = \mathcal{A}_{5,\delta^*} = 0.$$

В частности из $\mathcal{A}_{5,\delta^*} = 0$ следует, что

$$u - v_{8,2,1}^{2,2,t_0+\delta^*} = 0.$$

А это, в силу положительности числа δ^* , противоречит определению числа t_0 . Полученное противоречие доказывает теорему.

Из доказанной теоремы вытекает следующее

Следствие I.I. Пусть оператор $\mathcal{F}$ порождён функцией вида $F(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx})$, т.е.

$$\mathcal{F}(u(t, x)) = F(t, x, u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tx}(t, x), u_{xx}(t, x)),$$

причём:

1. Функция $F(t, x, u_1, \dots, u_5)$ определена в области $\mathcal{D}_T \times (-\infty, \infty)^5$ и в этой же области удовлетворяет условиям Каратеодори, т.е. измерима по (t, x) в $\mathcal{D}_T = [0, T] \times [0, \ell]$ для всех фиксированных $u_1, \dots, u_5 \in (-\infty, \infty)$ и непрерывна по $(u_1, u_2, \dots, u_5)$ в $(-\infty, \infty)^5$ для почти всех $(t, x) \in \mathcal{D}_T$.

2. Для каждого $R > 0$ в области $\mathcal{D}_T \times [-R, R]^3 \times (-\infty, \infty)^2$:

$$|F(t, x, u_1, \dots, u_5) - F(t, x, v_1, \dots, v_5)| \leq \sum_{i=1}^5 b_{i,R}(t) |u_i - v_i|,$$

где для каждого $t_0 \in [0, T)$ существует такое число $\delta_R(t_0)$ ($0 < \delta_R(t_0) \leq T - t_0$), что

$$(t - t_0)^{\frac{1}{2}} \cdot b_{1,R}(t), (t - t_0)^{\frac{1}{2}} \cdot b_{2,R}(t), (t - t_0) b_{3,R}(t), \\ b_{4,R}(t), (t - t_0)^{\frac{1}{2}} b_{5,R}(t) \in L_2(t_0, t_0 + \delta_R(t_0)). \quad (1.51)$$

3. Для каждого $R > 0$ в области $\mathcal{D}_T \times [-R, R]^3 \times (-\infty, \infty)^2$

$$|F(t, x, u_1, \dots, u_5)| \leq a_R(t, x) + b_R(t)(|u_4| + |u_5|),$$

где

$$a_R(t, x) \in L_2(\mathcal{D}_T), \quad b_R(t) \in L_2(0, T).$$

Тогда задача (1.1)-(1.3) не может иметь более одного обобщённого решения.

Для доказательства следствия достаточно проверить выполнение всех условий теоремы 1.2. На самом деле $\forall u(t, x) \in B_{2,2,T}^{2,1}$:

$$1. \|\mathcal{F}(u(t, x))\|_{L_2(\mathcal{D}_T)}^2 = \int_0^T \int_0^\ell F^2(t, x, u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x),$$

$$u_{tx}(t, x), u_{xx}(t, x)) dx dt \leq \int_0^T \int_0^\ell [a_R(t, x) + b_R(t)(|u_{tx}(t, x)| +$$

$$\begin{aligned}
& + \|u_{xx}(t, x)\|^2 dx dt \leq 3 \int_0^T \int_0^\ell a_R^2(t, x) dx dt + 3 \int_0^T \int_0^\ell b_R^2(t) (u_{tx}^2(t, x) + \\
& + u_{xx}^2(t, x)) dx dt \leq 3 \|a_R(t, x)\|_{L_2(D_T)}^2 + 3 \int_0^T b_R^2(t) \left[\frac{\ell}{2} \cdot \frac{\pi^2}{\ell^2} \sum_{n=1}^{\infty} (m u'_n(t))^2 + \right. \\
& + \left. \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\pi^4}{\ell^4} \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 u_n(t))^2 \right] dt \leq 3 \|a_R(t, x)\|_{L_2(D_T)}^2 + 3 \int_0^T b_R^2(t) \left[\frac{\pi^2}{2\ell} \|u\|_{B_{2,2,T}^{2,1}}^2 + \right. \\
& + \left. \frac{\pi^4}{2\ell^3} \|u\|_{B_{2,2,T}^{2,1}}^2 \right] dt = 3 \|a_R(t, x)\|_{L_2(D_T)}^2 + \frac{3\pi^2(\pi^2 + \ell^2)}{2\ell^3} \|b_R(t)\|_{L_2(o,T)}^2 \cdot \|u\|_{B_{2,2,T}^{2,1}}^2 < \infty,
\end{aligned}$$

где

$$\max \left\{ \|u(t, x)\|_{C(\mathcal{G}_T)}, \|u_t(t, x)\|_{C(\mathcal{G}_T)}, \|u_x(t, x)\|_{C(\mathcal{G}_T)} \right\} < R < +\infty.$$

Следовательно, условие 1 теоремы 1.2 выполнено.

2. Очевидно, что $\forall u(t, x), v(t, x) \in B_{2,2,T}^{2,1}$ и $t \in [0, T]$:

$$\|\mathcal{F}(u(t, x)) - \mathcal{F}(v(t, x))\|_{L_2(0,\ell)} = \|F(t, x, u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x),$$

$$u_{tx}(t, x), u_{xx}(t, x)) - F(t, x, v(t, x), v_t(t, x), v_x(t, x), v_{tx}(t, x),$$

$$v_{xx}(t, x))\|_{L_2(0,\ell)} \leq b_{1,R}(t) \|u(t, x) - v(t, x)\|_{L_2(0,\ell)} +$$

$$+ b_2(t) \|u_t(t, x) - v_t(t, x)\|_{L_2(o,\ell)} + b_{3,R}(t) \|u_x(t, x) -$$

$$- v_x(t, x)\|_{L_2(0,\ell)} + b_{4,R}(t) \|u_{tx}(t, x) - v_{tx}(t, x)\|_{L_2(0,\ell)} +$$

$$+ b_{5,R}(t) \|u_{xx}(t, x) - v_{xx}(t, x)\|_{L_2(0,\ell)} \leq \frac{\ell}{2} b_{1,R}(t) \|u - v\|_{B_{2,2,T}^0} +$$

$$+ \frac{\ell}{2} b_{2,R}(t) \|u_t - v_t\|_{B_{2,2,T}^0} + \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\pi}{\ell} b_{3,R}(t) \|u - v\|_{B_{2,2,T}^1} +$$

$$+ \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\pi}{\ell} b_{4,R}(t) \|u_t - v_t\|_{B_{2,2,T}^1} + \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\pi^2}{\ell^2} b_{5,R}(t) \|u - v\|_{B_{2,2,T}^2} \leq$$

$$\leq a_{1,R}(t)\|u-v\|_{B_{2,2}^0} + a_{2,R}(t)\|u-v\|_{B_{2,2}^1} + a_{3,R}(t)\|u-v\|_{B_{2,2}^2} + \\ + a_{4,R}(t)\|u-v\|_{B_{2,2,3}^{1,0}} + a_{5,R}(t)\|u-v\|_{B_{2,2,3}^{2,1}},$$

где

$$a_{1,R}(t) = \frac{\ell}{2} b_{1,R}(t), \quad a_{2,R}(t) = \frac{\pi}{2} b_{3,R}(t), \quad a_{3,R}(t) = \frac{\pi^2}{2\ell} b_{5,R}(t), \\ a_{4,R}(t) = \frac{\ell}{2} b_{2,R}(t), \quad a_{5,R}(t) = \frac{\pi}{2} b_{4,R}(t).$$

Следовательно, условие 2 теоремы 1.2 выполнено.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 1.2. Тогда из утверждения теоремы 1.2 вытекает, что задача (1.1)-(1.3) не может иметь более одного обобщённого решения. Этим следствие доказано.

Совершенно аналогично теореме 1.2, легко доказывается следующая

Теорема 1.3. Пусть

1. $i = 1, 2$.

2. $\forall u(t, x), v(t, x) \in B_{2,2,T}^{2,1} \cap G_i$ и $t \in [0, T]$ выполнено условие (1.27), где классы G_i определены в пункте 3 §1, а функции $a_{j,u,v}(t)$ ($j = \overline{1,5}$) удовлетворяют тем же условиям, что и в условии 2 теоремы 1.2.

Тогда задача (1.1)-(1.3) не может иметь: более одного решения почти всюду при $i = 1$ и более одного классического решения при $i = 2$.

§3. Исследование существования решений задачи (1.1)-(1.3).

В этом параграфе, с помощью принципов М.А.Красносельского (см.[71], стр.1234) и ненулевого вращения (см. [72], стр.322), доказаны следующие теоремы существования обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (1.1)-(1.3).

Теорема 1.4. Пусть

1. $i = 0, 1, 2$.

2. а) $\varphi(x) \in C^{(1+i)}[0, \ell]$, $\varphi^{(2+i)}(x) \in L_2(0, \ell)$ и $\varphi^{(2j)}(0) = \varphi^{(2j)}(\ell) = 0$, где $j=0$ при $i=0$; $j=0, 1$ при $i=1, 2$;

б) $\psi(x) \in C^{(i)}[0, \ell]$, $\psi^{(1+i)}(x) \in L_2(0, \ell)$ и $\psi^{(2j)}(0) = \psi^{(2j)}(\ell) = 0$, где $j=0$ при $i=0, 1$; $j=0, 1$ при $i=2$.

3. $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$, причём:

а) оператор $\mathcal{F}_1$ действует из шара $\mathcal{K}_1^{(i)}(\|u\|_{B_{2,2,T}^{1+i}} \leq R)$ в E_{x^i} непрерывно, где пространства E_{x^i} ($i = 0, 1, 2$) определены в пункте 3 §1, $R > \|W(t, x)\|_{B_{2,2,T}^{2+i, 1+i}}$, а функция $W(t, x)$ определена соотношением

$$W(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi_n + \frac{\ell}{\alpha n^2 \pi^2} (1 - e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t}) \right] \psi_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x; \quad (1.52)$$

б) оператор $\mathcal{F}_2$ действует из шара $\mathcal{K}_2^{(i)}(\|u\|_{B_{2,2,T}^{2+i, 1+i}} \leq R)$ в E_{x^i} и в этом шаре удовлетворяет условию Липшица:

$$\left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_2(u(t, x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_2(v(t, x)) \right\|_{L_2(\mathcal{D}_T)} \leq q_i \|u - v\|_{B_{2,2,T}^{2+i, 1+i}}, \quad (1.53)$$

где

$$\left(\frac{\ell}{\pi} \right)^i \cdot \frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} q_i \equiv q_{0,i} < 1.$$

$$4. \quad \|W(t, x)\|_{B_{2,2,T}^{2+i, 1+i}} + \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^i \cdot \frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \cdot$$

$$\sup_{u \in \mathcal{K}_2^{(i)}} \left\{ \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u(t, x)) \right\|_{L_2(\mathcal{D}_T)} \right\} \leq R. \quad (1.54)$$

Тогда задача (1.1)-(1.3) имеет: при $i = 0$ обобщённое решение, при $i = 1$ решение почти всюду, а при $i = 2$ классическое решение.

Доказательство. Из условия 2 данной теоремы следует,

что $W(t, x) \in B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$, ибо $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{2+i} \varphi_n)^2 < +\infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{1+i} \psi_n)^2 < +\infty$. В шаре $\mathcal{K}_2^{(i)}(\|u\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq R)$ рассмотрим операторы $Q_{1,i}$ и $Q_{2,i}$, определённые следующим образом:

$$Q_{1,i}(u) = W + \mathcal{P}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_1(u) \right), \quad Q_{2,i}(u) = \mathcal{P}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_2(u) \right), \quad (1.55)$$

где операторы $\mathcal{P}_i(u)$ ($i = 0, 1, 2$) определены соотношениями (1.24)-(1.26). Для любых $u, v \in \mathcal{K}_2^{(i)}$ будем оценивать следующие нормы:

$$Q_{1,i}(u) + Q_{2,i}(u) \Big|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}, \quad Q_{1,i}(u) - Q_{1,i}(v) \Big|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \text{ и}$$

$$Q_{2,i}(u) - Q_{2,i}(v) \Big|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} & Q_{1,i}(u) + Q_{2,i}(u) \Big|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} = W(t, x) + \\ & + \mathcal{P}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_1(u(t, x)) \right) + \mathcal{P}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_2(u(t, x)) \right) \Big|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq \\ & \leq \|W(t, x)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} + \left\| \mathcal{P}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_1(u(t, x)) \right) + \mathcal{P}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_2(u(t, x)) \right) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} = \\ & = \|W(t, x)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} + \left\| \mathcal{P}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u(t, x)) \right) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Теперь оценим второе слагаемое в правой части неравенства (1.56). Для любых n ($n = \overline{1, \infty}$), $t \in [0, T]$ и $u \in \mathcal{K}_2^{(i)}$ имеем:

$$\begin{aligned}
& \left\{ n^2 \cdot \frac{2\ell^2}{\alpha n^3 \pi^2} \int_0^t \int_0^t \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \left[1 - \exp \left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau) \right) \right] \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau \right\}^2 \leq \\
& \leq \frac{4\ell^2}{\alpha^2 \pi^4} \int_0^t \int_0^t \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \left[d\tau \cdot \int_0^t [1 - e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau)}] d\tau \right] \leq t \cdot \frac{4\ell^2}{\alpha^2 \pi^4} \cdot \\
& \cdot \int_0^t \int_0^t \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \left[d\tau \leq \frac{4\ell^2 T}{\alpha^2 \pi^4} \int_0^t \int_0^t \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right]^2 d\tau, \\
& \left\{ n^3 \cdot \frac{2\ell^2}{\alpha n^3 \pi^3} \int_0^t \int_0^t \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot [1 - e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau)}] \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau \right\}^2 \leq \\
& \leq \frac{4\ell^4}{\alpha^2 \pi^6} \int_0^t \int_0^t \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \left[d\tau \cdot \int_0^t [1 - e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau)}] d\tau \right] \leq \\
& \leq t \cdot \frac{4\ell^4}{\alpha^2 \pi^6} \int_0^t \int_0^t \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \left[d\tau \leq \right. \\
& \leq \frac{4\ell^4 T}{\alpha^2 \pi^6} \int_0^t \int_0^t \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \left[d\tau, \right. \\
& \left. \left\{ n^4 \cdot \frac{2\ell^3}{\alpha n^3 \pi^4} \int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot [1 - e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau)}] \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau \right\}^2 \leq \right. \\
& \leq \frac{4\ell^6}{\alpha^2 \pi^8} \int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \left[d\tau \cdot \int_0^t [1 - e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau)}] d\tau \right] \leq \\
& \leq t \cdot \frac{4\ell^6}{\alpha^2 \pi^8} \int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \left[d\tau \leq \right. \\
& \leq \frac{4\ell^6 T}{\alpha^2 \pi^8} \int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \left[d\tau; \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ n \cdot \frac{2}{\ell} \int_0^t \int_0^t \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \exp \left[-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau) \right] \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau \right\}^2 \leq \\
& \leq \frac{4}{\ell^2} \cdot n^2 \int_0^t \int_0^t \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \left[d\tau \cdot \int_0^t \exp \left[-\frac{2\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau) \right] d\tau = \right. \\
& = \frac{4}{\ell^2} \cdot n^2 \int_0^t \int_0^t \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \left[d\tau \cdot \frac{\ell^2}{2\alpha n^2 \pi^2} \cdot \right. \\
& \cdot \left. \left. \left[1 - \exp \left(-\frac{2\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t \right) \right] \right] \leq \frac{2}{\alpha \pi^2} \int_0^t \int_0^t \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right]^2 d\tau \leq \\
& \leq \frac{\ell}{\alpha \pi^2} \int_0^t \int_0^t \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \left[d\tau, \right. \\
& \left. \left\{ n^2 \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^t \frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \exp \left[-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau) \right] \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau \right\}^2 \leq \right. \\
& \leq \frac{4n^2}{\pi^2} \int_0^t \int_0^t \frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \left[d\tau \cdot \int_0^t \exp \left[-\frac{2\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau) \right] d\tau = \right. \\
& = \frac{4n^2}{\pi^2} \int_0^t \int_0^t \frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \left[d\tau \cdot \frac{\ell^2}{2\alpha n^2 \pi^2} \left[1 - \exp \left(-\frac{2\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t \right) \right] \right] \leq \\
& \leq \frac{2\ell^2}{\alpha \pi^4} \int_0^t \int_0^t \frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \left[d\tau \leq \frac{2\ell^2}{\alpha \pi^4} \int_0^t \int_0^t \frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right]^2 d\tau, \\
& \left\{ n^3 \cdot \frac{2\ell}{n^2 \pi^2} \int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \exp \left[-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau) \right] \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau \right\}^2 \leq \\
& \leq \frac{4n^2 \ell^2}{\pi^4} \int_0^t \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \left[d\tau \cdot \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \exp \left[-\frac{2\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t-\tau) \right] d\tau = \frac{4n^2 \ell^2}{\pi^4} \int_0^t \int_0^\ell \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \left[\right]^2 d\tau. \\
& \frac{\ell^2}{2\alpha n^2 \pi^2} \left[1 - \exp \left(-\frac{2\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t \right) \right] \leq \frac{2\ell^4}{\alpha \pi^6} \int_0^t \int_0^\ell \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \left[\right]^2 d\tau \leq \\
& \leq \frac{2\ell^4}{\alpha \pi^6} \int_0^T \int_0^\ell \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \left[\right]^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Из этих оценок следует, что..

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n^2 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{2\ell}{\alpha n^2 \pi^2} \int_0^t \int_0^\ell \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \left[1 - \exp \left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t-\tau) \right) \right] \cdot \right. \right. \\
& \left. \left. \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau \right| \right\}^2 \leq T \cdot \frac{4\ell^2}{\alpha^2 \pi^4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \int_0^\ell \left[\int_0^\ell \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right]^2 d\tau = \\
& = \frac{4\ell^2 T}{\alpha^2 \pi^4} \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^\ell \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right]^2 d\tau = \\
& = \frac{4\ell^2 T}{\alpha^2 \pi^4} \cdot \frac{\ell}{2} \iint_0^\ell \left\{ \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \right\}^2 d\xi d\tau = \frac{2T\ell^3}{\alpha^2 \pi^4} \|\mathcal{F}(u)\|_{L_2(\mathcal{D}_T)}^2, \quad (1.57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n^3 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{2\ell^2}{\alpha n^3 \pi^3} \int_0^t \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \left[1 - \exp \left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t-\tau) \right) \right] \cdot \right. \right. \\
& \left. \left. \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau \right| \right\}^2 \leq T \cdot \frac{4\ell^4}{\alpha^2 \pi^6} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \int_0^\ell \left[\int_0^\ell \frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right]^2 d\tau = \\
& = \frac{4\ell^4 T}{\alpha^2 \pi^6} \int_0^T \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^\ell \frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right]^2 \right\} d\tau \leq \\
& \leq \frac{4\ell^4 T}{\alpha^2 \pi^6} \cdot \frac{\ell}{2} \iint_0^\ell \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \right\}^2 d\xi d\tau = \frac{2\ell^5 T}{\alpha^2 \pi^6} \left\| \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}(u(t, x)) \right\|_{L_2(\mathcal{D}_T)}^2, \quad (1.58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n^4 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{2\ell^4}{\alpha n^4 \pi^4} \int_0^t \int_0^\ell \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right) \right] \right. \right. \\
& \left. \left. \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau \right| \right\}^2 \leq T \cdot \frac{4\ell^6}{\alpha^2 \pi^8} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \int_0^\ell \int_0^\ell \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\xi d\tau = \\
& = \frac{4\ell^6 T}{\alpha^2 \pi^8} \int_0^T \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^\ell \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right]^2 \right\} d\tau \leq \\
& \leq \frac{4\ell^6 T}{\alpha^2 \pi^8} \cdot \frac{\ell}{2} \int_0^T \int_0^\ell \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \right\}^2 d\xi d\tau = \frac{2\ell^7 T}{\alpha^2 \pi^8} \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{F}(u(t, x)) \right\|_{L_2(\mathcal{Q}_T)}^2; \quad (1.59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n \cdot \max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{2}{\ell} \int_0^t \int_0^\ell \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \exp\left[-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right] \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau \right| \right\}^2 \leq \\
& \leq \frac{\ell}{\alpha \pi^2} \left\| \mathcal{F}(u) \right\|_{L_2(\mathcal{Q}_T)}^2, \quad (1.60)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n^2 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{2}{n\pi} \int_0^t \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \exp\left[-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right] \right. \right. \\
& \left. \left. \cdot \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau \right| \right\}^2 \leq \frac{\ell^3}{\alpha \cdot \pi^4} \left\| \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}(u(t, x)) \right\|_{L_2(\mathcal{D}_T)}^2, \quad (1.61)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n^3 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{2\ell}{n^2 \pi^2} \int_0^t \int_0^\ell \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \exp\left[-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2}(t-\tau)\right] \right. \right. \\
& \left. \left. \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau \right| \right\}^2 \leq \frac{\ell^5}{\alpha \pi^6} \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{F}(u(t, x)) \right\|_{L_2(\mathcal{Q}_T)}^2. \quad (1.62)
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left\| \mathcal{P}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u(t, x)) \right) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^i \frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u(t, x)) \right\|_{L_2(\mathcal{D}_T)}. \quad (1.63)$$

Таким образом, для любых $u, v \in \mathcal{K}_2^{(i)}$ имеем:

$$\begin{aligned} \|Q_{1,i}(u) + Q_{2,i}(u)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} &= \left\| W + \mathcal{P}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u(t, x)) \right) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq \\ &\leq \|W\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} + \left\| \mathcal{P}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u(t, x)) \right) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq \|W\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} + \\ &+ \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^i \frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \cdot \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u(t, x)) \right\|_{L_2(\mathcal{D}_T)} \leq \|W\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} + \\ &+ \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^i \frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \cdot \sup_{u \in \mathcal{K}_2^{(i)}} \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u(t, x)) \right\|_{L_2(\mathcal{D}_T)} \leq R, \quad (1.64) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|Q_{1,i}(u) - Q_{1,i}(v)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} &= \left\| \mathcal{P}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_1(u(t, x)) \right) - \mathcal{P}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_1(v(t, x)) \right) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} = \\ &= \left\| \mathcal{P}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_1(u(t, x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_1(v(t, x)) \right) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq \\ &\leq \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^i \frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_1(u(t, x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_1(v(t, x)) \right\|_{L_2(\mathcal{D}_T)}, \quad (1.65) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|Q_{2,i}(u) - Q_{2,i}(v)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} &\leq \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^i \frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \cdot \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_2(u(t, x)) - \right. \\ &\left. - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_2(v(t, x)) \right\|_{L_2(\mathcal{D}_T)} \leq \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^i \frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \cdot q_i \|u - v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} = \\ &= q_{0,i} \|u - v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}. \quad (1.66) \end{aligned}$$

Так как $\mathcal{K}_2^{(i)}(\|u\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq R) \subset \mathcal{K}_1^{(i)}(\|u\|_{B_{2,2,T}^{1+i}} \leq R)$, то из (1.65), в силу условия 3а данной теоремы, следует, что операторы $Q_{1,i}$ переводят всякую последовательность, составленную из элементов $\mathcal{K}_2^{(i)}$ и сходящуюся по метрике пространства $B_{2,2,T}^{1+i}$, в последовательность, сходящуюся по метрике пространства $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$. В силу теоремы 1.1 шар $\mathcal{K}_2^{(i)}(\|u\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq R)$ пространства $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ вкладывается в шар $\mathcal{K}_1^{(i)}(\|u\|_{B_{2,2,T}^{1+i}} \leq R)$ пространства $B_{2,2,T}^{1+i}$ вполне непрерывно.

Следовательно, операторы $Q_{1,i}$ действуют из шара $\mathcal{K}_2^{(i)}$ пространства $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ в $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ вполне непрерывно. Далее, так как

$\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^i \frac{\ell}{\alpha\pi^2} \frac{2\ell T + \pi}{\alpha\ell} q_i = q_{0,i} < 1$, то из (1.66) видно, что операторы

$Q_{2,i}$ удовлетворяют в шаре $\mathcal{K}_2^{(i)}$ условию Липшица с коэффициентом Липшица, меньшем единицы. А из (1.64) видно, что операторы $Q_{1,i} + Q_{2,i}$ преобразуют шар $\mathcal{K}_2^{(i)}$ в себя. Таким образом, в силу комбинированного принципа М.А.Красносельского, операторы $Q_{1,i} + Q_{2,i} = Q_i$ имеют в шаре $\mathcal{K}_2^{(i)}$ по крайней мере одну не-

подвижную точку $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x$, которая, как покажем

ниже, является: при $i=0$ обобщённым решением, при $i=1$ решением почти всюду, а при $i=2$ классическим решением задачи (1.1)-(1.3):

1. Пусть $i=0$. Тогда очевидно, что коэффициенты Фурье $u_n(t)$ ($n=1,2,\dots$) функции $u(t, x)$ удовлетворяют системе (1.21).

Тогда, очевидно, что

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin \frac{n\pi}{\ell} x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x = \varphi(x) \quad \forall x \in [0, \ell],$$

$$u_t(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(0) \sin \frac{n\pi}{\ell} x = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x = \psi(x) \quad \forall x \in [0, \ell],$$

т.е. оба начальных условия (1.2) удовлетворяются в обычном классическом смысле. Далее, покажем, что для любых $v(t, x)$, фигурирующих в определении обобщённого решения задачи (1.1)-(1.3), удовлетворяются соответствующие интегральные тождества (1.18) и (1.19).

С этой целью для каждого натурального числа p примем обозначение: $u_p(t, x) = \sum_{n=1}^p u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x$, где $u_n(t)$ - коэффициенты Фурье вышенайденной неподвижной точки $u(t, x)$ оператора Q_t . Рассмотрим следующие выражения:

$$\begin{aligned} J_{1,p} = & \int_0^T \int_0^{\ell} \{ u_{p,t}(t, x) v_t(t, x) - \alpha u_{p,xx}(t, x) v_t(t, x) + \\ & + \mathcal{F}(u(t, x)) v(t, x) \} dx dt - \alpha \int_0^{\ell} \varphi''(x) v(0, x) dx + \\ & + \int_0^{\ell} \psi(x) v(0, x) dx, \end{aligned} \quad (1.67)$$

$$\begin{aligned} J_{2,p} = & \int_0^T \int_0^{\ell} \{ u_{p,t}(t, x) v_t(t, x) - \alpha u_{p,tx}(t, x) v_x(t, x) + \\ & + \mathcal{F}(u(t, x)) v(t, x) \} dx dt + \int_0^{\ell} \psi(x) v(0, x) dx, \end{aligned} \quad (1.68)$$

Пользуясь системой (1.21), имеем:

$$\int_0^T \int_0^{\ell} u_{p,t}(t, x) v_t(t, x) dx dt = \int_0^T \int_0^{\ell} \sum_{n=1}^p u'_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \cdot v_t(t, x) dx dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^p \int_0^\ell \left[\int_0^T u_n'(t) v_t(t, x) dt \right] \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx = \sum_{n=1}^p \int_0^\ell \left[u_n'(t) v_t(t, x) \right]_{t=0}^{t=T} - \\
&\quad - \int_0^T u_n''(t) v(t, x) dt \left\} \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx = \sum_{n=1}^p \int_0^\ell \left[-u_n'(0) v(0, x) - \right. \\
&\quad \left. - \int_0^T u_n''(t) v(t, x) dt \right] \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx = - \int_0^\ell \sum_{n=1}^p \psi_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x v(0, x) dx - \\
&\quad - \int_0^T \int_0^\ell \sum_{n=1}^p u_n''(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x v(t, x) dx dt, \\
&\quad \int_0^T \int_0^\ell u_{p,xx}(t, x) v_t(t, x) dx dt = \\
&= \sum_{n=1}^p \int_0^\ell \left[-\frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} \int_0^T u_n(t) v_t(t, x) dt \right] \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx = \\
&= -\frac{\pi^2}{\ell^2} \sum_{n=1}^p n^2 \int_0^\ell \left[u_n(t) v(t, x) \right]_{t=0}^{t=T} - \int_0^T u_n'(t) v(t, x) dt \left] \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx = \\
&= -\frac{\pi^2}{\ell^2} \sum_{n=1}^p n^2 \int_0^\ell \left[-u_n(0) v(0, x) - \int_0^T u_n'(t) v(t, x) dt \right] \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx = \\
&= \frac{\pi^2}{\ell^2} \int_0^\ell \sum_{n=1}^p n^2 \varphi_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x v(0, x) dx + \\
&\quad + \frac{\pi^2}{\ell^2} \int_0^T \int_0^\ell \sum_{n=1}^p n^2 u_n'(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x v(t, x) dx dt.
\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения соответственно вместо первого и второго слагаемого в равенстве (1.67) и пользуясь системой (1.21), получаем:

$$\begin{aligned}
J_{1,p} = & \int_0^T \int_0^\ell \left\{ \sum_{n=1}^p \left[-u_n''(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x - \frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} u_n'(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right] + \right. \\
& + \mathcal{F}(u(t, x)) \left. \right\} v(t, x) dx dt - \int_0^\ell \sum_{n=1}^p \psi_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x v(0, x) dx - \\
& - \frac{\alpha \pi^2}{\ell^2} \int_0^\ell \sum_{n=1}^p n^2 \varphi_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x v(0, x) dx - \alpha \int_0^\ell \varphi''(x) v(0, x) dx + \\
& + \int_0^\ell \psi(x) v(0, x) dx = \int_0^T \int_0^\ell \left\{ \sum_{n=1}^p \left[-u_n''(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x - \right. \right. \\
& - \frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} u_n'(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \left. \left. \right] + \mathcal{F}(u(t, x)) \right\} v(t, x) dx dt + \\
& + \int_0^\ell \left[\psi(x) - \sum_{n=1}^p \psi_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right] \cdot v(0, x) dx - \alpha \int_0^\ell [\varphi''(x) + \\
& + \sum_{n=1}^p \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x] v(0, x) dx = \\
& = \int_0^T \int_0^\ell \left\{ \sum_{n=1}^p \left[\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} \exp \left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t \right) \psi_n + \frac{2\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} \int_0^\ell \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \right. \right. \\
& \cdot \exp \left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau) \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau - \frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} \exp \left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t \right) \psi_n - \\
& - \frac{2\alpha n^2 \pi^2}{\ell^3} \int_0^\ell \int_0^\ell \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \left[-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau) \right] \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau - \\
& - \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \mathcal{F}(u(t, \xi)) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \left. \right] \sin \frac{n\pi}{\ell} x + \mathcal{F}(u(t, x)) \left. \right\} v(t, x) dx dt + \\
& + \int_0^\ell \left[\sum_{n=1}^\infty \psi_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x - \sum_{n=1}^p \psi_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right] v(0, x) dx + \alpha \int_0^\ell \left[\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} \cdot \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \varphi_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x - \sum_{n=1}^p \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \left] v(0, x) dx = \int_0^T \int_0^\ell \left[- \sum_{n=1}^p \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \mathcal{F}(u(t, \xi)) \cdot \right. \\
& \left. \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} x + \mathcal{F}(u(t, x)) \right] v(t, x) dx dt + \int_0^\ell \sum_{n=p+1}^\infty \psi_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \cdot \\
& \cdot v(0, x) dx + \alpha \cdot \int_0^\ell \sum_{n=p+1}^\infty \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x v(0, x) dx = \\
& = \int_0^T \int_0^\ell \left[\sum_{n=p+1}^\infty \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \mathcal{F}(u(t, \xi)) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right] \cdot v(t, x) dx + \\
& + \int_0^\ell \sum_{n=p+1}^\infty \psi_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x v(0, x) dx + \alpha \int_0^\ell \sum_{n=p+1}^\infty \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \cdot v(0, x) dx.
\end{aligned}$$

В результате получили, что

$$\begin{aligned}
J_{1,p} &= \int_0^T \int_0^\ell \sum_{n=p+1}^\infty \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \mathcal{F}(u(t, \xi)) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} x \cdot v(t, x) dx dt + \\
&+ \int_0^\ell \left(\sum_{n=p+1}^\infty \psi_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right) v(0, x) dx + \alpha \int_0^\ell \left(\sum_{n=p+1}^\infty \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right) \cdot v(0, x) dx.
\end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}
|J_{1,p}| &\leq \left\| \sum_{n=p+1}^\infty \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \mathcal{F}(u(t, \xi)) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right\|_{L_2(D_T)} \cdot \\
&\cdot \|v(t, x)\|_{L_2(D_T)} + \left\| \sum_{n=p+1}^\infty \psi_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right\|_{L_2(0, \ell)} \cdot \|v(0, x)\|_{L_2(0, \ell)} + \\
&+ \alpha \left\| \sum_{n=p+1}^\infty \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right\|_{L_2(0, \ell)} \cdot \|v(0, x)\|_{L_2(0, \ell)} \rightarrow 0 \text{ при } p \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\lim_{p \rightarrow \infty} J_{1,p} = 0$. Тогда, переходя к пределу при $p \rightarrow \infty$, из (1.67) получаем, что выполняется интегральное тождество (1.18).

Теперь рассмотрим следующее выражение:

$$J_{2,p} = \int_0^T \int_0^\ell \{ u_{p,t}(t, x) v_t(t, x) dx dt - \alpha u_{p,tx}(t, x) v_x(t, x) + \\ + \mathcal{F}(u(t, x)) \cdot v(t, x) \} dx dt + \int_0^\ell \psi(x) V(0, x) dx.$$

Как было показано выше

$$\int_0^T \int_0^\ell u_{p,t}(t, x) v_t(t, x) dx dt = \int_0^T \sum_{n=1}^p u'_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x v_t(t, x) dx dt = \\ = - \int_0^\ell \psi_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \cdot v(0, x) dx - \int_0^T \sum_{n=1}^p u''_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \cdot v(t, x) dx dt.$$

С другой стороны,

$$\alpha \int_0^T \int_0^\ell u_{p,tx}(t, x) v_x(t, x) dx dt = \frac{\alpha\pi}{\ell} \sum_{n=1}^p n \int_0^T [u'_n(t) \cdot \cos \frac{n\pi}{\ell} x \cdot \\ \cdot v_x(t, x) dx] dt = \frac{\alpha\pi}{\ell} \sum_{n=1}^p n \int_0^T u'_n(t) [v(t, x) \cos \frac{n\pi}{\ell} x]_{x=0}^{x=\ell} + \\ + \frac{n\pi}{\ell} \int_0^\ell v(t, x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx] dt = \int_0^T \sum_{n=1}^p \frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} u'_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \cdot \\ \cdot v(t, x) dx dt.$$

Пользуясь последними двумя соотношениями и системой (1.21), получаем:

$$J_{2,p} = \int_0^T \int_0^\ell \left[\mathcal{F}(u(t, x)) - \sum_{n=1}^p \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \mathcal{F}(u(t, \xi)) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \cdot \right. \\ \left. \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right] v(t, x) dx dt + \int_0^\ell \left[\psi(x) - \sum_{n=1}^p \psi_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right] \cdot v(0, x) dx.$$

Тогда, очевидно, что

$$|J_{2,p}| \leq \left\| \mathcal{F}(u(t, x)) - \sum_{n=1}^p \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \mathcal{F}(u(t, \xi)) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right\|_{L_2(\mathcal{G}_T)} \cdot \|v(t, x)\|_{L_2(0,T)} + \left\| \psi(x) - \sum_{n=1}^p \psi_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right\|_{L_2(0,\ell)} \cdot \|v(0, x)\|_{L_2(0,\ell)} \rightarrow 0 \quad \text{при } p \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $\lim_{p \rightarrow \infty} J_{2,p} = 0$.

Теперь, переходя к пределу при $p \rightarrow \infty$, из последнего равенства получаем, что выполняется интегральное тождество (1.19).

Таким образом, вышенайденная функция $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x$ является обобщённым решением задачи (1.1)-(1.3).

2. Пусть $i=1$. Тогда из соотношения $\mathcal{Q}_1(u) = u$ следует, что функции $u_n(t)$ ($n=1,2,\dots$) удовлетворяют на $[0, T]$ системе (1.22), которая эквивалентна системе (1.21). Далее, так как $u(t, x) \in B_{2,2,T}^{3,2}$, то очевидно, что

$$u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tx}(t, x), u_{xx}(t, x) \in C(\mathcal{G}_T), \quad (1.69)$$

$$u_{txx}, u_{xxx} \in C([0, T]; L_2(0, \ell)). \quad (1.70)$$

Далее, из (1.21₆) имеем

$$u_n''(t) = \mathcal{G}_n(t) + \omega_n(t), \quad (1.71)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_n(t) = & -\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} \exp\left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t\right) \psi_n - \frac{2\alpha n \pi}{\ell^2} \int_0^t \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \times \\ & \times \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi \cdot \exp\left[-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau)\right] d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (1.72)$$

$$\omega_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \mathcal{F}(u(t, \xi)) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi. \quad (1.73)$$

Так как $\mathcal{G}_n(t) = -\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} u'_n(t)$, то из сходимости ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} u'_n(t) \right)^2$ следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\max_{0 \leq t \leq T} \mathcal{G}_n(t) \right)^2 < +\infty. \quad (1.74)$$

Далее, очевидно, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2(t) &= \frac{2}{\ell} \left\{ \int_0^{\ell} \mathcal{F}(u(t, \xi)) \cdot \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right\}^2 = \\ &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \{ \mathcal{F}(u(t, \xi)) \}^2 d\xi \equiv g(t) \in C[0, T], \end{aligned} \quad (1.75)$$

ибо $\mathcal{F}(u(t, x)) \in E_x \subset C(D_T)$.

Тогда, в силу непрерывности на $[0, T]$ всех функций $\omega_n(t)$ и суммы ряда (1.75), этот же ряд сходится на $[0, T]$ равномерно. Так как $u''_n(t) = \mathcal{G}_n(t) + \omega_n(t)$ и ряды (1.74) и (1.75) сходятся равномерно на $[0, T]$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u''_n(t))^2 \quad (1.76)$$

также равномерно сходится на $[0, T]$.

Так как все функции $\mathcal{G}_n(t), \omega_n(t)$ (и, следовательно, $u''_n(t)$) непрерывны на $[0, T]$ и ряд (1.76) равномерно сходится на $[0, T]$, то функция $\sum_{n=1}^{\infty} (u''_n(t))^2$ непрерывна на $[0, T]$.

Тогда очевидно, что

$$u_{tt} \in C([0, T]; L_2(0, \ell)). \quad (1.77)$$

Таким образом, из свойств (1.69), (1.70) и (1.77) следует, что

$$u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tx}(t, x), u_{xx}(t, x) \in C(\mathcal{D}_T),$$

$$u_{tt}(t, x), u_{ttx}(t, x) \in L_2(\mathcal{D}_T).$$

Далее, из систем (1.22_a) и (1.22_б) легко получить, что $\forall t \in [0, T]$ и натурального p :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_p(t, x) - \alpha \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} u_p(t, x) = \\ = \sum_{n=1}^p \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \mathcal{F}(u(t, \xi)) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \end{aligned} \quad (1.78)$$

где

$$u_p(t, x) = \sum_{n=1}^p u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$$

Для каждого фиксированного $t \in [0, T]$, переходя к пределу по метрике $L_2(0, \ell)$ в обеих частях равенства (1.78), легко получить, что при всех $t \in [0, T]$ почти всюду в $(0, \ell)$:

$$u_{tt}(t, x) - \alpha u_{txx}(t, x) = \mathcal{F}(u(t, x)).$$

Следовательно, функция $u(t, x)$ удовлетворяет почти всюду в $\mathcal{D}_T$ уравнению (1.1). Далее, легко проверить, что условия (1.2) и (1.3) выполняются в обычном смысле.

Таким образом, при $i=1$ функция $u(t, x)$ является решением почти всюду задачи (1.1)-(1.3).

3. Пусть $i=2$. Тогда из соотношения $\underline{Q}_i(u) = u$ следует, что функции $u_n(t)$ ($n=1, 2, \dots$) удовлетворяют на $[0, T]$ системе (1.23), которая эквивалентна системе (1.21). Так как $u(t, x) \in B_{2, 2, T}^{4, 3}$, то очевидно, что

$$\begin{aligned} u(t, x), \quad u_t(t, x), \quad u_x(t, x), \quad u_{tx}(t, x), \quad u_{xx}(t, x), \\ u_{txx}(t, x), \quad u_{xxx}(t, x) \in C(\mathcal{D}_T), \quad u_{txx}, u_{xxx} \in C([0, T]; L_2(0, \ell)). \end{aligned} \quad (1.79)$$

Далее, из (1.21_б) имеем:

$$u_n''(t) = \mathcal{G}_n(t) + \omega_n(t), \quad (1.80)$$

где

$$\mathcal{G}_n(t) = -\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} \exp\left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t\right) \psi_n + \frac{2\alpha}{\ell} \int_0^t \int_0^\ell \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi \cdot \exp\left[-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau)\right] d\xi d\tau, \quad (1.81)$$

$$\omega_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \mathcal{F}(u(t, \xi)) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi. \quad (1.82)$$

Так как $\mathcal{G}_n(t) = -\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} u'_n(t)$, то из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^3 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u'_n(t)| \right)^2$$

следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |\mathcal{G}_n(t)| &= \frac{\alpha \pi^2}{\ell^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u'_n(t)| \leq \\ &\leq \frac{\alpha \pi^2}{\ell^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^3 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} |u'_n(t)| \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty, \end{aligned}$$

т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |\mathcal{G}_n(t)| < +\infty. \quad (1.83)$$

Из (1.83) видно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x$ равномерно сходится в замкнутой области $\mathcal{D}_T = [0, T] \times [0, \ell]$. Следовательно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \in C(\mathcal{D}_T). \quad (1.84)$$

Далее, пользуясь тем, что $\mathcal{F}(u(t, x)) \in E_{x^2}$, $\forall t \in [0, T]$ имеем:

$$\omega_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \mathcal{F}(u(t, \xi)) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi = \frac{2}{n\pi} \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{F}(u(t, \xi)) \cdot \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi.$$

Тогда очевидно, что при любом фиксированном N ($N=1,2,\dots$) $\forall t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N}^{\infty} \omega_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right| &\leq \sum_{n=N}^{\infty} |\omega_n(t)| \leq \frac{2}{\pi} \left\{ \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ \left\{ \sum_{n=N}^{\infty} \left[\int_0^t \frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{F}(u(t, \xi)) \cdot \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{2}{\pi} \sqrt{\ell} \left\{ \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t \frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{F}(u(t, \xi)) \cdot \sqrt{2} \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} &\leq \\ &\leq \frac{\sqrt{2\ell}}{\pi} \left\{ \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{F}(u(t, \xi)) \right]^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq C_0 \cdot \frac{\sqrt{2\ell}}{\pi} \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (1.85) \end{aligned}$$

где

$$C_0 \equiv \max_{0 \leq t \leq T} \left\{ \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{F}(u(t, \xi)) \right]^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Из (1.85) видно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x$ равномерно сходится в замкнутой области $\mathcal{D}_T$. Следовательно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \in C(\mathcal{D}_T).$$

Таким образом, ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathcal{G}_n(t) + \omega_n(t)) \sin \frac{n\pi}{\ell} x$ равномерно сходится в замкнутой области $\mathcal{D}_T$.

Следовательно:

$$u_{tt}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \in C(\mathcal{D}_T). \quad (1.86)$$

Таким образом, из свойств (1.79) и (1.86) следует, что

$u(t, x), u_x(t, x), u_{xx}(t, x), u_{xxx}(t, x), u_t(t, x), u_{tx}(t, x), u_{ttx}(t, x),$
 $u_{tt}(t, x) \in C(\mathcal{G}_T), u_{xxxx}(t, x), u_{txxx}(t, x) \in C([0, T]; L_2(0, \ell)).$

Далее, из системы (1.21) получаем, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, x) - \alpha u_{ttx}(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (u_n''(t) + \alpha \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} u_n'(t)) \sin \frac{n\pi}{\ell} x = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \mathcal{F}(u(t, \xi)) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} x = \mathcal{F}(u(t, x)). \end{aligned}$$

Следовательно, функция $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1.1) в замкнутой области $\mathcal{G}_T$.

Легко проверить, что функция $u(t, x)$ удовлетворяет и всем условиям (1.2), (1.3). Таким образом, функция $u(t, x)$ является классическим решением задачи (1.1)-(1.3).

Этим теорема 1.4 доказана.

Теорема 1.5. Пусть

1. $i = 0, 1, 2$ и выполнено условие 2 теоремы 1.4.

2. $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3$, причём:

а) оператор $\mathcal{F}_1$ действует из $B_{2,T}^{1+i}$ в E_x непрерывно и

$$\forall u \in B_{2,T}^{1+i}, \quad t \in [0, T]:$$

$$\left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_1(u(t, x)) \right\|_{L_2(0, \ell)} \leq a_1(t) + a_2(t) \|u\|_{B_{2,T}^{1+i}}^{\gamma} + a_3(t) \cdot \|u\|_{B_{2,T}^{1+i}}, \quad (1.87)$$

где пространство E_x ($i = 0, 1, 2$) определено в пункте 3 §1,

$a_i(t) \in L_2(0, T)$ ($i = 1, 3$) и $0 < \gamma < 1$;

б) оператор $\mathcal{F}_2$ действует из некоторого шара $\mathcal{K}_i^* (\|u\|_{B_{2,T}^{1+i}} \leq C_i)$

пространства $B_{2,T}^{1+i}$ в E_x непрерывно, где

$$C_i > C_{0,i} \equiv \max \left\{ y : y^2 \leq \left(\mathcal{A}_{1,i} + \mathcal{A}_{2,i} |y|^{2\gamma} \right) \mathcal{A}_{3,i} \right\} \quad (1.88)$$

$$\mathcal{A}_{1,i} \equiv 2\|W\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 + \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \frac{6(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell})}{\alpha^2\pi^4} \|a_1(t)\|_{L_2(0,T)}^2, \quad (1.89)$$

$$\mathcal{A}_{2,i} \equiv \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \frac{6(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell})}{\alpha^2\pi^4} \|a_2(t)\|_{L_2(0,T)}^2, \quad (1.90)$$

$$\mathcal{A}_{3,i} \equiv \exp\left\{\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \frac{6(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell})^2}{\alpha^2\pi^4} \cdot \|a_3(t)\|_{L_2(0,T)}^2\right\}, \quad (1.91)$$

а функция $w(t, x)$ определена соотношением (1.52);

$$в) \inf_{u \in S_i} \left\{ \|u - Q_{1,i}(u)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} - \|Q_{2,i}(u)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \right\} > 0, \quad (1.92)$$

где S_i - граница шара $\mathcal{H}_i \left\{ \|u\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq C_i \right\}$

$$Q_{1,i}(u) = W + \mathcal{P}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_1(u(t, x)) \right), Q_{2,i}(u) = \mathcal{P}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_2(u(t, x)) \right),$$

а операторы $\mathcal{P}_i$ ($i = 0, 1, 2$) определены соотношениями (1.24)-(1.26);

г) оператор $\mathcal{F}_3$ действует из шара $\mathcal{H}_{\rho_i} \left\{ \|u\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq \rho_i \right\}$ в $E_{x'}$ и для любых $u, v \in \mathcal{H}_{\rho_i}$:

$$\left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_3(u(t, x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_3(v(t, x)) \right\|_{L_2(D_T)} \leq q_i \|u - v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}, \quad (1.93)$$

где

$$\rho_i \geq C_i, \quad \rho_i \geq \rho_{0,i} \equiv \sup_{u \in K_i} \left\{ \|Q_{1,i}(u) + Q_{2,i}(u)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \right\}, \quad (1.94)$$

$$\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^i \cdot \frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2} \cdot q_i \equiv q_{0,i} \leq 1 - \frac{\rho_{0,i}}{\rho_i}, \quad \rho_{0,i} < 1; \quad (1.95)$$

д)

$$\inf_{u \in S_i} \left\{ \|u - Q_{1,i}(u) - Q_{2,i}(u)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} - \|Q_{3,i}(u)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \right\} > 0, \quad (1.96)$$

где

$$Q_{3,i}(u) = \mathcal{F}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_3(u(t, x)) \right);$$

$$e) \mathcal{F}_3(0) = 0.$$

Тогда задача (1.1)-(1.3) имеет: при $i = 0$ обобщённое решение, при $i = 1$ решение почти всюду, а при $i = 3$ классическое решение.

Доказательство. Оператор $Q_{1,i}$ рассмотрим в пространстве $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$. Очевидно, что $\forall u, v \in B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$:

$$\begin{aligned} & \|Q_{1,i}(u) - Q_{1,i}(v)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq \\ & \leq \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^i \frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_1(u(t, x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_1(v(t, x)) \right\|_{L_2(D_T)}. \end{aligned} \quad (1.97)$$

Из последнего неравенства, в силу условия 2а данной теоремы, следует, что оператор $Q_{1,i}$ действует из пространства $B_{2,T}^{1+i}$ в $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ непрерывно. Так как (по теореме 1.1) пространство $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ вкладывается в пространство $B_{2,T}^{1+i}$ вполне непрерывно, то оператор $Q_{1,i}$ действует в $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ вполне непрерывно.

Рассмотрим в $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ уравнения

$$u = \mu \cdot Q_{1,i}(u), \quad \mu \in [0, 1], \quad (1.98)$$

и априори оценим всевозможные их решения $u_\mu(t, x)$. Тогда, пользуясь неравенством (1.87), для любых $\mu \in [0, 1]$ и $t \in [0, T]$ имеем:

$$\begin{aligned} \|u_\mu\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 &= \|\mu \cdot Q_{1,i}(u_\mu)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 \leq \|Q_{1,i}(u_\mu)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 = \\ &= \left\| W + \mathcal{F}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_1(u_\mu(t, x)) \right) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 \leq 2\|W\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left\| \mathcal{F}_1 \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_1(u_\mu(t, x)) \right) \right\|_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}}^2 \leq 2 \|W\|_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}}^2 + 2 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \\
& \cdot \frac{(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell})^2}{\alpha^2 \pi^4} \cdot \int_0^t \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_1(u_\mu(\tau, x)) \right\|_{L_2(0,\ell)}^2 d\tau \leq 2 \|W\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 + \\
& + 2 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \frac{(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell})^2}{\alpha^2 \pi^4} \cdot \int_0^t \{a_1(\tau) + a_2(\tau) \cdot \\
& \cdot \|u_\mu\|_{B_{2,T}^{1+i}}^\gamma + a_3(\tau) \|u_\mu\|_{B_{2,\tau}^{1+i}}\}^2 d\tau \leq 2 \|W\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 + \\
& + 6 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \frac{(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell})^2}{\alpha^2 \pi^4} \cdot \left\{ \int_0^t a_1^2(\tau) d\tau + \right. \\
& + \|u_\mu\|_{B_{2,T}^{1+i}}^{2\gamma} \cdot \int_0^t a_2^2(\tau) d\tau + \int_0^t a_3^2(\tau) \|u_\mu\|_{B_{2,\tau}^{1+i}}^2 d\tau \left. \right\} \leq 2 \|W\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 + \\
& + \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \frac{6(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell})^2}{\alpha^2 \pi^4} \cdot \{ \|a_1(t)\|_{L_2(0,T)}^2 + \\
& + \|u_\mu\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^{2\gamma} \cdot \|a_2(t)\|_{L_2(0,T)}^2 + \int_0^t a_3^2(\tau) \|u_\mu\|_{B_{2,2,\tau}^{2+i,1+i}}^2 d\tau \},
\end{aligned}$$

причём здесь пользовались тем, что $\forall \tau \in [0, T]$ $u|_{B_{2,T}^{1+i}} \leq u|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}$ и, следовательно, $u|_{B_{2,T}^{1+i}} \leq u|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}$. Таким образом, $\forall \mu \in [0, 1]$ и $t \in [0, T]$ имеем:

$$\begin{aligned} \|u_\mu\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 &\leq 2\|W\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 + \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \frac{6(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell})^2}{\alpha^2\pi^4} \cdot \left[\|a_1(t)\|_{L_2(0,T)}^2 + \right. \\ &+ \|a_2(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \cdot \|u_\mu\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^{2\gamma} \left. \right] + \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \frac{6(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell})^2}{\ell^2\pi^4} \cdot \\ &\cdot \int_0^t a_3^2(\tau) \|u_\mu\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 d\tau. \end{aligned} \quad (1.99)$$

Из (1.99), применив неравенство Р.Беллмана, получаем, что $\forall \mu \in [0,1]$ и $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} \|u_\mu\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 &\leq \left\{ 2\|W\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 + \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \frac{6(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell})^2}{\alpha^2\pi^4} \cdot \left[\|a_1(t)\|_{L_2(0,T)}^2 + \right. \right. \\ &+ \|a_2(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \cdot \|u_\mu\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^{2\gamma} \left. \right] \left. \right\} \cdot \exp \left[\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \frac{6(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell})^2}{\alpha^2\pi^4} \cdot \right. \\ &\cdot \|a_3(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \left. \right]. \end{aligned} \quad (1.100)$$

Отсюда, пользуясь обозначениями (1.89)-(1.91), $\forall \mu \in [0,1]$ имеем:

$$\|u_\mu\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 \leq \left(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \cdot \|u_\mu\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^{2\gamma} \right) \cdot \mathcal{A}_3. \quad (1.101)$$

А из (1.101), пользуясь обозначением (1.88), имеем:

$$\|u_\mu\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq C_{0,i} \quad \forall \mu \in [0,1], \quad (1.102)$$

т.е. всевозможные решения u_μ уравнений (1.98) принадлежат шару

$$\mathcal{K}_{0,i} \left\{ \|u\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq C_{0,i} \right\}.$$

Из (1.98) и (1.102) видно, что при любом $\mu \in [0,1]$ вполне непрерывное векторное поле $\Phi_{\mu,i} = \mathcal{J} - \mu \cdot Q_{1,i}$ не имеет нулей на границе S_i шара $\mathcal{K}_i \left\{ \|u\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq C_i \right\}$, где числа C_i определены соот-

ношением (1.88). Следовательно, вполне непрерывные векторные поля $\Phi_0 = \mathcal{J}$ и $\Phi_{1,i} = \mathcal{J} - Q_{1,i}$ гомотопны на сфере S_i . Тогда вращения на S_i этих полей одинаковы, а именно:

$$\gamma(\mathcal{J} - Q_{1,i}; S_i) = \gamma(\mathcal{J}; S_i) = 1. \quad (1.103)$$

Теперь рассмотрим оператор $Q_{2,i}$ в шаре $\mathcal{K}_i$. Аналогично тому, как показали полную непрерывность оператора $Q_{1,i}$ в $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$, легко показать, что оператор $Q_{2,i}$ действует из шара K_i в $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ вполне непрерывно.

Далее, на границе S_i шара $\mathcal{K}_i$ рассмотрим вполне непрерывные векторные поля $\mathcal{J} - Q_{1,i} - \lambda Q_{2,i}$, где $\lambda \in [0,1]$. В силу условия 2в данной теоремы, для любых $\lambda \in [0,1]$ и $u \in S_i$ имеем:

$$\begin{aligned} u - Q_{1,i}(u) - \lambda Q_{2,i}(u)_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} &\geq u - Q_{1,i}(u)_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} - \lambda Q_{2,i}(u)_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \geq \\ &\geq u - Q_{1,i}(u)_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} - Q_{2,i}(u)_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} > 0. \end{aligned} \quad (1.104)$$

Отсюда, в частности, следует, что вполне непрерывные векторные поля $\mathcal{J} - Q_{1,i}$ и $\mathcal{J} - Q_{1,i} - Q_{2,i}$ гомотопны на сфере S_i . Следовательно, на S_i их вращения равны:

$$\gamma(\mathcal{J} - Q_{1,i} - Q_{2,i}; S_i) = \gamma(\mathcal{J} - Q_{1,i}; S_i) = \gamma(\mathcal{J}; S_i) = 1. \quad (1.105)$$

А теперь в шаре $\mathcal{K}_{\rho,i}(\|u\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq \rho_i)$ рассмотрим оператор

$$Q_{3,i} = \mathcal{F}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_3(u(t, x)) \right),$$

где числа ρ_i определены соотношением (1.94). Легко видеть, что для любых $u, v \in \mathcal{K}_{\rho,i}$:

$$\|Q_{3,i}(u) - Q_{3,i}(v)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^i \frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_3(u(t, x)) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left\| -\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_3(v(t, x)) \right\|_{L_2(D_T)} \leq \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^i \cdot \frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \cdot q_i \|u - v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} = \\
& = q_{0,i} \cdot \|u - v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}, \quad (1.106)
\end{aligned}$$

где числа $q_{0,i}$ определены соотношением (1.95).

Для каждого фиксированного $v_0 \in \mathcal{H}_{\rho_{0,i}} \left(\|u\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq \rho_{0,i} \right)$, где числа $\rho_{0,i}$ определены соотношением (1.94) и $\varepsilon \in [0,1]$, рассмотрим в шаре $\mathcal{H}_{\rho,i}$ следующее уравнение (относительно u):

$$u = \varepsilon \cdot Q_{3,i}(u) + v_0. \quad (1.107)$$

Так как для любых $u, u_1, u_2 \in \mathcal{H}_{\rho,i}$:

$$\begin{aligned}
& \|\varepsilon Q_{3,i}(u) - v_0\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq \|Q_{3,i}(u)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} + \|v_0\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} = \\
& = \|Q_{3,i}(u) - Q_{3,i}(0)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^*) + \|v_0\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq q_{0,i} \|u\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} + \\
& + \|v_0\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq q_{0,i} \cdot \rho_i + \rho_{0,i} \leq \rho_i, \\
& \|\varepsilon Q_{3,i}(u_1) + v_0 - [\varepsilon \cdot Q_{3,i}(u_2) + v_0]\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq \\
& \leq \|Q_{3,i}(u_1) - Q_{3,i}(u_2)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq q_{0,i} \cdot \|u_1 - u_2\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}},
\end{aligned}$$

причём $q_{0,i} < 1$, то, в силу принципа сжатых отображений, оператор $\mathcal{A}_i(u) = \varepsilon \cdot Q_{3,i}(u) + v_0$ имеет в шаре $V_{\rho,i}$ единственную неподвижную точку u_0 . Сопоставляя каждому $V_0 \in \mathcal{H}_{\rho_0,i}$ элемент u_0 , т.е. единственное в $\mathcal{H}_{\rho,i}$ решение уравнения (1.107), порождаем некоторый оператор $R_{\varepsilon,i}$ (этот оператор $R_{\varepsilon,i}$ называется

*) Очевидно, что $Q_{3,i}(0) = \mathcal{P}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}_3(0) \right) = \mathcal{P}_i(0) = 0$.

резольвентой, вообще говоря, нелинейного оператора $Q_{3,i}$), действующий из шара $\mathcal{K}_{\rho_0,i}$ в шар $\mathcal{K}_{\rho_0,i}$. Пользуясь тем, что для любых $\varepsilon \in [0,1]$ и $v \in \mathcal{K}_{\rho_0,i}$ $R_{\varepsilon,i}(v) = \varepsilon Q_{3,i}(R_{\varepsilon,i}v) + v$, легко получить, что $\forall V_1, V_2 \in \mathcal{K}_{\rho_0,i}$:

$$\|R_{\varepsilon,i}(v_1) - R_{\varepsilon,i}(v_2)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq \frac{1}{1 - \varepsilon q_{0,i}} \|v_1 - v_2\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}. \quad (1.108)$$

В силу обозначения (1.93) $(Q_{1,i} + Q_{2,i})\mathcal{K}_i \subset \mathcal{K}_{\rho_0,i}$. Следовательно, для каждого $\varepsilon \in [0,1]$ оператор $R_{\varepsilon,i}$ определен, в частности, и на $(Q_{1,i} + Q_{2,i})\mathcal{K}_i$. В силу (1.108) оператор $R_{\varepsilon,i}$ непрерывен (даже удовлетворяет условию Липшица) на множестве $(Q_{1,i} + Q_{2,i})\mathcal{K}_i$. Так как операторы $Q_{1,i}$ и $Q_{2,i}$ вполне непрерывны на $\mathcal{K}_i$ для каждого $\varepsilon \in [0,1]$ операторы $R_{\varepsilon,i}(Q_{1,i} + Q_{2,i})$ вполне непрерывны на $\mathcal{K}_i$. Далее, в силу (1.96), для любых $\varepsilon \in [0,1]$ на S_i

$$\begin{aligned} \|u - Q_{1,i}(u) - Q_{2,i}(u) - \varepsilon Q_{3,i}(u)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} &\geq \\ &\geq \|u - Q_{1,i}(u) - Q_{2,i}(u)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} - \|Q_{3,i}(u)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} > 0. \end{aligned} \quad (1.109)$$

Следовательно, вполне непрерывные векторные поля $\mathcal{J} - Q_{1,i} - Q_{2,i} - \varepsilon Q_{3,i}$ при любом $\varepsilon \in [0,1]$ не имеют нулей на S_i . Тогда не имеют на S_i нулей и вполне непрерывные векторные поля $\mathcal{J} - R_{\varepsilon,i}(Q_{1,i} + Q_{2,i})$, ибо каждый нуль (на S_i) поля $\mathcal{J} - R_{\varepsilon,i}(Q_{1,i} + Q_{2,i})$, является одновременно и нулем поля $\mathcal{J} - Q_{1,i} - Q_{2,i} - \varepsilon Q_{3,i}$. Таким образом, вполне непрерывные векторные поля $\mathcal{J} - R_{0,i}(Q_{1,i} + Q_{2,i}) = \mathcal{J} - Q_{1,i} - Q_{2,i}$ и $\mathcal{J} - R_{0,i}(Q_{1,i} + Q_{2,i})$ гомотопны на S_i .

Следовательно, учитывая (1.105), имеем

$$\gamma(\mathcal{J} - R_{1,i}(Q_{1,i} + Q_{2,i}); S_i) = \gamma(\mathcal{J} - Q_{1,i} - Q_{2,i}; S_i) = 1. \quad (1.110)$$

Отсюда, в силу принципа ненулевого вращения, следует, что вполне непрерывное векторное поле $\mathcal{J} - R_{1,i}(Q_{1,i} + Q_{2,i})$ имеет

внутри шара $\mathcal{K}_i$ по крайней мере один нуль. Так как каждый такой нуль является одновременно и нулем поля $\mathcal{J} - Q_{1,i} - Q_{2,i} - Q_{3,i}$, то, таким образом, доказано существование в K_i по крайней мере одной неподвижной точки $u(t, x)$ у оператора $Q_{1,i} + Q_{2,i} + Q_{3,i} = Q_i$.

Совершенно так, как в конце процесса доказательства предыдущей теоремы, легко проверить, что эта неподвижная точка $u(t, x)$ является: при $i = 0$ обобщённым решением, при $i = 1$ решением почти всюду, а при $i = 2$ классическим решением задачи (1.1)-(1.3).

Теорема доказана.

Замечание 1.2. Очевидно, что неравенство (1.92) имеет место, например, если

$$\sup_{u \in S_j} \left\{ \|Q_{2,i}(u)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \right\} < \inf_{u \in S_j} \left\{ \|u - Q_{1,i}(u)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \right\}. \quad (1.111)$$

Как видно из процесса доказательства теоремы 1.5, правая часть неравенства (1.111) положительна (см. соотношения (1.98), (1.102) и (1.88)). Таким образом, неравенство (1.111) (а также неравенство (1.92)) требует достаточную малость норм $Q_{2,i}(u)_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}$

для элементов $u \in S_j$. То же самое относится и к неравенству (1.96).

Замечание 1.3. Как видно из процесса доказательства теоремы 1.4. и структуры пространств $B_{2,2,T}^{3,2}$ и $B_{2,2,T}^{4,3}$, почти всюду и классические решения $u(t, x)$ задачи (1.1)-(1.3), найденные нами в теоремах 1.4 и 1.5, обладают следующими дополнительными (по сравнению с определением почти всюду и классического решений задачи (1.1)-(1.3)) свойствами:

1) для решения почти всюду

$$u_{xxx}, u_{lxx}, u_{xtx}, u_{xxt}, u_{tt} \in C([0, T]; L_2(0, \ell));$$

2) а для классического решения

$$u_{xxx}(t, x), u_{lxx}, u_{xtx}(t, x), u_{xxt}(t, x) \in C(\mathcal{Q}_T),$$

$$u_{xxx}, u_{lxxx}, u_{xtxx}, u_{xxtx}, u_{xxxt}, u_{ltx} \in C([0, T]; L_2(0, \ell)).$$

§4. Исследование существования и единственности решений задачи (1.1)-(1.3).

В этом параграфе методом последовательных приближений доказывается следующая теорема о существовании и единственности обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (1.1)-(1.3).

Теорема 1.6. Пусть

1. $i = 0, 1, 2$ и выполнено условие 2 теоремы 1.4.

2. Оператор $\mathcal{F}$ действует из $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ в E_x и $\forall u \in B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$, $t \in [0, T]$:

$$\left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u(t, x)) \right\|_{L_2(0, \ell)} \leq a(t) + b(t) \|u\|_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}}, \quad (1.112)$$

где пространство E_x ($i = 0, 1, 2$) определено в пункте 3 §1,

$a(t), b(t) \in L_2(0, T)$ и $0 < \gamma < 1$.

3. Для любых $u, v \in \mathcal{K}_0$ ($\|u\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq C_0$) и $t \in [0, T]$:

$$\left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u(t, x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(v(t, x)) \right\|_{L_2(0, \ell)} \leq c(t) \|u - v\|_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}}, \quad (1.113)$$

где $c(t) \in L_2(0, T)$,

$$C_0 \equiv \left[2 \|w(t, x)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 + 4 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \left(\frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \right)^2 \cdot \|a(t)\|_{L_2(0, T)}^2 \right] \cdot \exp \left[4 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \left(\frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \right)^2 \cdot \|b(t)\|_{L_2(0, T)}^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.114)$$

а функция $w(t, x)$ определена соотношением (1.52).

Тогда задача (1.1)-(1.3) имеет: при $i = 0$ единственное обобщённое решение $u(t, x)$, при $i = 1$ единственное в $B_{2,2,T}^{3,2}$ решение почти всюду $u(t, x)$, а при $i = 2$ единственное в $B_{2,2,T}^{4,3}$ классическое решение $u(t, x)$; их можно найти методом последо-

вательных приближений, причём скорость сходимости последовательных приближений $u_k(t, x)$ к $u(t, x)$ характеризуется так:

$$\|u_k(t, x) - u(t, x)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq C_0 \cdot \frac{\left[\left(\frac{\ell}{\pi} \right)^i \frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \cdot \|c(t)\|_{L_2(0,T)} \right]^k}{\sqrt{k!}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.115)$$

Доказательство. Очевидно, что оператор

$$Q_i(u) = w + \mathcal{P}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u(t, x)) \right), \quad (1.116)$$

где операторы $\mathcal{P}_i$ определены соотношениями (1.24)-(1.26), действуют в пространстве $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ и в шаре $\mathcal{K}_0$ удовлетворяют условию Липшица:

$$\|Q_i(u) - Q_i(v)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^i \cdot \frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \|c(t)\|_{L_2(0,T)} \cdot \|u - v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}. \quad (1.117)$$

Рассмотрим в $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ последовательность $u_k(t, x) = Q_i(u_{k-1}(t, x))$, где $u_0(t, x) \equiv 0$. Пользуясь неравенством (1.112), методом математической индукции легко получить, что для любых $k (k = 0, 1, 2, \dots)$ и $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 &= \|Q_i(u_{k-1})\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 = \left\| w + \mathcal{P}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u_{k-1}(t, x)) \right) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 \leq \\ &\leq 2\|w\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 + 2 \left\| \mathcal{P}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u_{k-1}(t, x)) \right) \right\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 \leq 2\|w\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 + \\ &+ 2 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \right)^2 \cdot \int_0^t \int_0^\ell \left[\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u_{k-1}(\tau, x)) \right]^2 dx d\tau \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2\|w\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 + 4\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot \\
&\cdot \int_0^t \{a^2(\tau) + b^2(\tau)\|u_{k-1}\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2\} d\tau \leq \\
&\leq \mathcal{A}^2 + \mathcal{A}^2 \int_0^t B^2(\tau) d\tau + \dots + \mathcal{A}^2 \cdot \frac{\left\{ \int_0^t B^2(\tau) d\tau \right\}^k}{k!}, \quad (1.118)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^2 &\equiv 2\|w\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 + 4\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2 \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot \|a(t)\|_{L_2(0,T)}^2, \\
B^2(\tau) &\equiv 4\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot b^2(\tau).
\end{aligned}$$

На самом деле, при $k=1$ неравенство (1.118) справедливо. Предположим, что неравенство (1.118) справедливо для $k=m$ и докажем его справедливость и для $k=m+1$. Очевидно, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
\|u_{m+1}\|_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}}^2 &\leq A^2 + \int_0^t B^2(\tau)\|u_m\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 d\tau \leq \mathcal{A}^2 + \\
&+ \int_0^t B^2(\tau) \left\{ \mathcal{A}^2 + \mathcal{A}^2 \int_0^\tau B^2(s) ds + \dots + \mathcal{A}^2 \cdot \frac{\left[\int_0^\tau B^2(s) ds \right]^m}{m!} \right\} d\tau = \\
&= \mathcal{A}^2 + \mathcal{A}^2 \cdot \int_0^t B^2(\tau) d\tau + \mathcal{A}^2 \cdot \int_0^t B^2(\tau) \int_0^\tau B^2(s) ds d\tau + \dots +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +, \mathcal{A}^2 \cdot \int_0^t B^2(\tau) \cdot \frac{\left[\int_0^\tau B^2(s) ds \right]^m}{m!} d\tau = , \mathcal{A}^2 + , \mathcal{A}^2 \cdot \int_0^t B^2(\tau) d\tau + \\
& + , \mathcal{A}^2 \cdot \frac{\left[\int_0^t B^2(\tau) d\tau \right]^2}{2} + \dots + , \mathcal{A}^2 \cdot \frac{\left[\int_0^t B^2(\tau) d\tau \right]^{m+1}}{(m+1)!} .
\end{aligned}$$

Из (1.118) следует, что $\forall k (k = 0, 1, 2, \dots)$ и $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
\|u_k\|_{B_{2,2,t}^{2+j,1+i}}^2 & \leq , \mathcal{A}^2 \left\{ 1 + \int_0^t B^2(\tau) d\tau + \dots + \frac{\left[\int_0^t B^2(\tau) d\tau \right]^k}{k!} \right\} \leq \\
& \leq , \mathcal{A}^2 \left\{ 1 + \int_0^T B^2(\tau) d\tau + \dots + \frac{\left[\int_0^T B^2(\tau) d\tau \right]^k}{k!} + \dots \right\} = \\
& = , \mathcal{A}^2 \cdot \exp \left\{ \int_0^T B^2(\tau) d\tau \right\} .
\end{aligned} \tag{1.119}$$

Следовательно, $\forall k (k = 0, 1, 2, \dots)$:

$$\|u_k\|_{B_{2,2,T}^{2+j,1+i}}^2 \leq , \mathcal{A}^2 \cdot \exp \left\{ \int_0^T B^2(\tau) d\tau \right\} \equiv C_0^2 , \tag{1.120}$$

т.е. все приближения $u_k(t, x)$ содержатся в шаре $\mathcal{H}_0$.

Далее, пользуясь условием 3 данной теоремы и учитывая (1.120), легко получить, что для любых $t \in [0, T]$ и k ($k = 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned}
\|u_{k+1}(t, x) - u_k(t, x)\|_{B_{2,2,t}^{2+j,1+i}}^2 & = \left\| \mathcal{P}_t \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u_k(t, x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u_{k-1}(t, x)) \right) \right\|_{B_{2,2,t}^{2+j,1+i}}^2 \leq \\
& \leq \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha^2 \pi^4} \right)^2 \cdot \int_0^t \int_0^l \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u_k(\tau, x)) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u_{k-1}(\tau, x)) \right\}^2 dx d\tau = \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \right)^2 \cdot \\
& \cdot \int_0^t \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u_k(\tau, x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u_{k-1}(\tau, x)) \right\|_{L_2(0, t)}^2 d\tau \leq \\
& \leq \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \right)^2 \cdot \int_0^t c^2(\tau) \|u_k - u_{k-1}\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 d\tau \leq \\
& \leq \|u_1 - u_0\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 \cdot \frac{\left[\left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \right)^2 \cdot \int_0^t c^2(\tau) d\tau \right]^k}{k!} = \\
& = \|u_1\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 \cdot \frac{\left[\left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \right)^2 \cdot \int_0^t c^2(\tau) d\tau \right]^k}{k!}. \quad (1.121)
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
& \|u_{k+1}(t, x) - u_k(t, x)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 \leq \\
& \leq C_0^2 \cdot \frac{\left\{ \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \right)^2 \cdot \|c(t)\|_{L_2(0, T)}^2 \right\}^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.122)
\end{aligned}$$

Отсюда следует фундаментальность $\{u_k(t, x)\}_{k=1}^\infty$ в $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$. В

силу полноты пространства $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$:

$$u_k(t, x) \xrightarrow{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} u(t, x) \in \mathcal{H}_0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Тогда, пользуясь непрерывностью оператора Q_i в шаре $\mathcal{K}_0$ (см. неравенство (1.117)), из соотношений $u_k(t, x) = Q_i(u_{k-1}(t, x))$ имеем:

$$u(t, x) = Q_i(u(t, x)).$$

Легко проверить (так, как в конце доказательства теоремы 1.4), что функция $u(t, x)$ является: при $i = 0$ обобщённым решением, при $i = 1$ решением почти всюду, а при $i = 2$ классическим решением задачи (1.1)-(1.3).

Далее, аналогично (1.121) и (1.122), имеем

$$\begin{aligned} \|u_k(t, x) - u(t, x)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 &\leq \|u_0(t, x) - u(t, x)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 \cdot \\ &\cdot \frac{\left\{ \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \right)^2 \cdot \|c(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right\}^k}{k!} \leq \\ &\leq C_0^2 \cdot \frac{\left\{ \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \right)^2 \cdot \|c(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right\}^k}{k!}. \end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость неравенства (1.115).

Наконец, докажем единственность в $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ ($i = 0, 1, 2$) решений (обобщённого, почти всюду и классического) задачи (1.1)-(1.3). Пусть $u(t, x) \in B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ при $i = 0, 1, 2$ - любое соответственно обобщённое, почти всюду и классическое решения задачи (1.1)-(1.3). Тогда, в силу лемм 1.1 и 1.2, коэффициенты Фурье

$$u_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} u(t, x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx \quad \text{функции } u(t, x) \text{ удовлетворяют на}$$

$[0, T]$ системе (1.21), причём, в силу того, что $\mathcal{F}(u(t, x)) \in E_x$, систему (1.21) можно преобразовать к виду (1.22) при $i = 1$ и к виду (1.23) при $i = 2$. Таким образом, функция $u(t, x)$ является в

$B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ неподвижной точкой оператора $Q_i (i = 0, 1, 2)$. Тогда, пользуясь неравенством (1.112), аналогично (1.119), $\forall t \in [0, T]$ имеем:

$$\|u\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 \leq \mathcal{A}^2 + \int_0^t B^2(\tau) \|u\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 d\tau.$$

Отсюда, применив неравенство Р.Беллмана, получаем:

$$\|u\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 \leq \mathcal{A}^2 \cdot \exp \left\{ \int_0^T B^2(\tau) d\tau \right\} = C_0^2,$$

т.е. всевозможные в $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ ($i = 0, 1, 2$) соответственно обобщённые, почти всюду и классических решения задачи (1.1)-(1.3) принадлежат шару $\mathcal{K}_0$. Пусть $u(t, x)$ и $v(t, x)$ - два любых обобщённых, почти всюду и классических решения задачи (1.1)-(1.3) соответственно в $B_{2,2,T}^{2,1}$, $B_{2,2,T}^{3,2}$ и $B_{2,2,T}^{4,3}$. Тогда, пользуясь условием 3 данной теоремы и соотношениями $u(t, x), v(t, x) \in \mathcal{K}_0$, легко получить, что для любого $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 &\leq \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot \int_0^t \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u(\tau, x)) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(v(\tau, x)) \right\|_{L_2(o, \ell)}^2 d\tau \leq \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot \\ &\quad \cdot \int_0^t c^2(\tau) \|u - v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда, применив неравенство Р.Беллмана, получаем, что $u - v|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \equiv 0$ на $[0, T]$. Следовательно, $u = v$. Теорема доказана.

Из теоремы 1.6 при $i = 0$ вытекает следующее

Следствие 1.2. Пусть

1. Для $i = 0$ выполнено условие 2 теоремы 1.4.

2. Оператор $\mathcal{F}$ порожден функцией $F(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx})$, т.е.

Тогда, пользуясь неравенством (1.123) и оценками (1.125), (1.129), $\forall u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \in B_{2,2,T}^{2,1}$ и $t \in [0, T]$ имеем:

$$\begin{aligned}
 & \| \mathcal{F}(u(t, x)) \|_{L_2(0, \ell)} = \\
 & = \| F(t, x, u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tx}(t, x), u_{xx}(t, x)) \|_{L_2(0, \ell)} \leq \\
 & \leq \| \mathcal{A}_1(t, x) + \mathcal{A}_2(t, x) \cdot [|u(t, x)| + |u_t(t, x)| + |u_x(t, x)|] + \\
 & + \mathcal{A}_3(t) \cdot [|u_{tx}(t, x)| + |u_{xx}(t, x)|] \|_{L_2(0, \ell)} \leq \| \mathcal{A}_1(t, x) \|_{L_2(0, \ell)} + \\
 & + \| \mathcal{A}_2(t, x) \cdot [|u(t, x)| + |u_t(t, x)| + |u_x(t, x)|] \|_{L_2(0, \ell)} + \\
 & + \mathcal{A}_3(t) \cdot [|u_{tx}(t, x)| + |u_{xx}(t, x)|]_{L_2(0, \ell)} \leq \| \mathcal{A}_1(t, x) \|_{L_2(0, \ell)} + \\
 & + \left(\frac{\pi}{3\sqrt{10}} + \frac{\pi}{\sqrt{6}} + \frac{\pi}{\ell\sqrt{6}} \right) \cdot \| u \|_{B_{2,2,T}^{2,1}} \cdot \| \mathcal{A}_2(t, x) \|_{L_2(0, \ell)} + \\
 & + \sqrt{\frac{\ell}{2}} \left(\frac{\pi}{\ell} + \frac{\pi^2}{\ell^2} \right) \mathcal{A}_3(t) \cdot \| u \|_{B_{2,2,T}^{2,1}} = a(t) + b(t) \cdot \| u \|_{B_{2,2,T}^{2,1}}. \quad (1.130)
 \end{aligned}$$

Следовательно, для $i = 0$ условие 2 теоремы 1.6 выполнено.

Теперь пусть $u(t, x)$, $v(t, x)$ - любые две функции, принадлежащие шару $\mathcal{H}_0 \left(\| u \|_{B_{2,2,T}^{2,1}} \leq C_0 \right)$ где C_0 - число, фигурирующее в условии 3 данного следствия.

Тогда, в силу оценок (1.125)-(1.127), $\forall u(t, x), v(t, x) \in \mathcal{H}_0$ и $t \in [0, T]$, $x \in [0, \ell]$ имеем:

$$\left\{ \begin{aligned} & -\frac{\pi}{3\sqrt{10}} C_0 \leq u(t, x), \quad v(t, x) \leq \frac{\pi}{3\sqrt{10}} C_0, \\ & -\frac{\pi}{\sqrt{6}} C_0 \leq u_t(t, x), v_t(t, x) \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} C_0, \\ & -\frac{\pi^2}{\ell\sqrt{6}} C_0 \leq u_x(t, x), v_x(t, x) \leq \frac{\pi}{\ell\sqrt{6}} C_0. \end{aligned} \right. \quad (1.131)$$

Тогда, пользуясь соотношениями (1.131) и условием 3 данного следствия (т.е. неравенством (1.124)), совершенно аналогично неравенству (1.130), $\forall u(t, x), v(t, x) \in \mathcal{H}_0$ и $t \in [0, T]$ имеем:

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{F}(u(t, x)) - \mathcal{F}(v(t, x))\|_{L_2(0, \ell)} = \\ & = \|F(t, x, u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{xx}(t, x), u_{xx}(t, x)) - \\ & - F(t, x, v(t, x), v_t(t, x), v_x(t, x), v_{xx}(t, x), v_{xx}(t, x))\|_{L_2(0, \ell)} \leq \\ & \leq \|B_1(t, x) \cdot [|u(t, x) - v(t, x)| + |u_t(t, x) - v_t(t, x)| + \\ & + |u_x(t, x) - v_x(t, x)|]\|_{L_2(0, \ell)} + B_2(t) \cdot \|u_{xx}(t, x) - v_{xx}(t, x)\|_{L_2(0, \ell)} + \\ & + \|u_{xx}(t, x) - v_{xx}(t, x)\|_{L_2(0, \ell)} \leq \left(\frac{\pi}{3\sqrt{10}} + \frac{\pi}{\sqrt{6}} + \frac{\pi}{\ell\sqrt{6}} \right) \cdot \|u - v\|_{B_{2,2,\ell}^{2,1}} \cdot \\ & \cdot \|B_1(t, x)\|_{L_2(0, \ell)} + \sqrt{\frac{\ell}{2}} \cdot \left(\frac{\pi}{\ell} + \frac{\pi^2}{\ell^2} \right) \cdot \|u - v\|_{B_{2,2,\ell}^{2,1}} \cdot B_2(t) = c(t) \cdot \|u - v\|_{B_{2,2,\ell}^{2,1}}, \end{aligned}$$

т.е. для $i = 0$ выполнено условие 3 теоремы 1.6.

Таким образом, для $i = 0$ все условия теоремы 1.6 выполнены. А тогда утверждение данного следствия следует из утверждения теоремы 1.6.

§5. Ещё раз о существовании решений задачи (1.1)-(1.3).

В этом параграфе, с помощью выше доказанной теоремы 1.6 и принципа Шаудера, доказывается следующая теорема о существовании обобщённого, почти всюду и классического решений задачи (1.1)-(1.3).

Теорема 1.7. Пусть

1. $i = 0, 1, 2$ и выполнено условие 2 теоремы 1.4.
2. $\mathcal{F}(u) = \mathcal{G}(u, u)$, причём:

а) оператор $\mathcal{G}(u, v)$ действует из $B_{2,T}^{1+i} \times B_{2,2,T}^{2+i, 1+i}$ в E_{ℓ}^i , причём для любых $u \in B_{2,T}^{1+i}$, $v \in B_{2,2,T}^{2+i, 1+i}$ и $t \in [0, T]$:

$$\left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \phi(u(t, x), v(t, x)) \right\|_{L_2(0, \ell)} \leq a_1(t) + a_2(t) \|u\|_{B_{2,2,T}^{1+i}}^\gamma +$$

$$+ a_3(t) \|u\|_{B_{2,2,T}^{1+i}} + a_4(t) \|v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^\gamma + a_5(t) \|v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}, \quad (1.132)$$

где $a_i(t) \in L_2(0, T)$ ($i = 1, 5$), $0 < \gamma < 1$;

б) для любых $u \in \mathcal{H}_0 \left(\|u\|_{B_{2,2,T}^{1+i}} \leq C_0 \right)$, $v_1, v_2 \in B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ и $t \in [0, T]$:

$$\left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \phi(u(t, x), v_1(t, x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \phi(u(t, x), v_2(t, x)) \right\|_{L_2(0, \ell)} \leq$$

$$\leq b(t) \|v_1 - v_2\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}, \quad (1.133)$$

где $b(t) \in L_2(0, T)$,

$$C_0 \equiv \max \left\{ y : y^2 \leq (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 |y|^{2\gamma}), \mathcal{A}_3 \right\} \quad (1.134)$$

$$\mathcal{A}_1 \equiv 2 \|w\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 + \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \frac{10(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell})^2}{\alpha^2 \pi^4} \cdot \|a_1(t)\|_{L_2(0,T)}^2, \quad (1.135)$$

$$\mathcal{A}_2 \equiv \frac{10 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} (\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell})^2}{\alpha^2 \pi^4} \cdot \left[\|a_2(t)\|_{L_2(0,T)}^2 + \|a_4(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right], \quad (1.136)$$

$$\mathcal{A}_3 \equiv \exp \left\{ \frac{10 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} (\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell})^2}{\alpha^2 \pi^4} \left[\|a_3(t)\|_{L_2(0,T)}^2 + \|a_5(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right] \right\}, \quad (1.137)$$

а функция $w(t, x)$ определена равенством (1.52);

в) для каждого фиксированного $v \in \mathcal{H} \left(\|v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq C \right)$ оператор

$\phi(u, v)$ действует из шара $\mathcal{H}_0 \left(\|u\|_{B_{2,2,T}^{1+i}} \leq C_0 \right)$ в $E_{x'}$ непрерывно, где

$$C = \min \{ C_1, C_2 \}, \quad (1.138)$$

$$C_1 \equiv \left\{ \left[2 \|w(t, x)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 + 8 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \frac{(\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell})^2}{\alpha^2 \pi^4} (\|a_1(t)\|_{L_2(0,T)}^2 + \right. \right. \\ \left. + \|a_2(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \cdot C_0^{2\gamma} + \|a_3(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \cdot C_0^2) \right] \cdot \\ \left. \cdot \exp \left[8 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \frac{(\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell})^2}{\alpha^2 \pi^4} \|b(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (1.139)$$

$$C_2 \equiv \max \left\{ y : y^2 \leq (\tilde{\mathcal{A}}_1 + \tilde{\mathcal{A}}_2 |y|^{2\gamma}) \tilde{\mathcal{A}}_3 \right\}, \quad (1.140)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_1 \equiv 2 \|w(t, x)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 + 10 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \frac{(\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell})^2}{\alpha^2 \pi^4} [\|a_1(t)\|_{L_2(0,T)}^2 + \\ + \|a_2(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \cdot C_0^{2\gamma} + \|a_3(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \cdot C_0^2], \quad (1.141)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_2 \equiv 10 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \frac{(\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell})^2}{\alpha^2 \pi^4} \|a_4(t)\|_{L_2(0,T)}^2, \quad (1.142)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_3 \equiv \exp \left[10 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \frac{(\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell})^2}{\alpha^2 \pi^4} \|a_5(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right].$$

Тогда задача (1.1)-(1.3) имеет: при $i=0$ обобщённое решение, при $i=1$ решение почти всюду, а при $i=2$ классическое решение.

Доказательство. На топологическом произведении $B_{2,T}^{1+i} \times B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ определим следующий оператор $\tilde{\mathcal{F}}$:

$$\tilde{\mathcal{F}}(u, v) = \begin{cases} \mathcal{F}(u, v) & \text{при } u \in \mathcal{K}_0, v \in B_{2,2,T}^{2+i,1+i}, \\ \mathcal{F}(C_0 \frac{u}{\|u\|_{B_{2,T}^{1+i}}}, v) & \text{при } u \in B_{2,T}^{1+i} / \mathcal{K}_0, v \in B_{2,2,T}^{2+i,1+i}. \end{cases} \quad (1.143)$$

Очевидно, что любых $u \in B_{2,T}^{1+i}, v_1, v_2 \in B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ и $t \in [0, T]$:

$$\left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{F}}(u(t, x), v(t, x)) \right\|_{L_2(o, \ell)} \leq a_1(t) + a_2(t) \|u\|_{B_{2,T}^{1+i}}^\gamma + a_3(t) \|u\|_{B_{2,T}^{1+i}} +$$

$$+ a_4(t) \|v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^{\gamma} + a_5(t) \|v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}, \quad (1.144)$$

$$\left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{P}}(u(t, x), v(t, x)) \right\|_{L_2(\sigma, \ell)} \leq a_1(t) + a_2(t) \cdot C_0^{\gamma} + a_3(t) C_0 + \\ + a_4(t) \|v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^{\gamma} + a_5(t) \|v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}, \quad (1.145)$$

$$\left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{P}}(u(t, x), v_1(t, x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{P}}(u(t, x), v_2(t, x)) \right\|_{L_2(0, \ell)} \leq \\ \leq b(t) \|v_1 - v_2\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}, \quad (1.146)$$

$$\left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{P}}(u(t, x), v(t, x)) \right\|_{L_2(0, \ell)} \leq \\ \leq a_1(t) + a_2(t) C_0^{\gamma} + a_3(t) C_0 + b(t) \|v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}, \quad (1.147)$$

а для каждого $v \in \mathcal{K}$ оператор $\tilde{\mathcal{P}}(u, v)$ действует из $B_{2,T}^{1+i}$ в E_x непрерывно. Теперь для каждого фиксированного $u \in B_{2,T}^{1+i}$ в пространстве $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ рассмотрим оператор $Q_{i,u}$:

$$Q_{i,u}(v) = w + \mathcal{P}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{P}}(u, v) \right), \quad (1.148)$$

где операторы $\mathcal{P}_i$ ($i=0,1,2$) определены соотношениями (1.24)-(1.26). Так как для каждого фиксированного $u \in B_{2,T}^{1+i}$ оператор $\tilde{\mathcal{P}}(u, v)$ удовлетворяет (относительно v) условиям 2 и 3 теоремы 1.6 (сравн. неравенства (1.147) и (1.146) с неравенствами (1.113) и (1.112)), то, как видно из процесса доказательства теоремы 1.6, для каждого фиксированного $u \in B_{2,T}^{1+i}$ оператор $Q_{i,u}$, определенный соотношением (1.148), имеет в $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ единственную неподвижную точку $v \in B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$. Сопоставляя каждому $u \in B_{2,T}^{1+i}$ соответствующую ему единственную неподвижную точку $v \in B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ оператора $Q_{i,u}$, порождаем некоторый оператор H_i :

$$H_i(u) = v = Q_{i,u}(v) = w + \mathcal{P}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{P}}(u, v) \right). \quad (1.149)$$

Пользуясь неравенством (1.149), для любых $u \in B_{2,T}^{1+i}$ и $t \in [0, T]$ имеем:

$$\begin{aligned} \|H_i(u)\|_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}}^2 &\equiv \|v\|_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}}^2 \leq 2\|w\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 + 2\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot \\ &\cdot \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{P}}(u(\tau, x), v(\tau, x)) \right\|_{L_2(0,\ell)}^2 d\tau \leq 2\|w\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 + \\ &+ 8\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot \left\{ \|a_1(t)\|_{L_2(0,T)}^2 + \|a_2(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \cdot C_0^{2\gamma} + \right. \\ &\left. + \|a_3(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \cdot C_0^{-2} \right\} + 8\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot \int_0^t b^2(\tau) \|v\|_{B_{2,2,\tau}^{2+i,1+i}}^2 d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда, применив неравенство Р.Беллмана и пользуясь обозначением (1.139), получаем:

$$\|H_i(u)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 \equiv \|v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 \leq C_1^2 \quad \forall u \in B_{2,T}^{1+i}. \quad (1.150)$$

С другой стороны, пользуясь неравенством (1.145), для любых $u \in B_{2,T}^{1+i}$ и $t \in [0, T]$ имеем:

$$\begin{aligned} \|H_i(u)\|_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}}^2 &\equiv \|v\|_{B_{2,2,t}^{2+i,1+i}}^2 \leq 2\|w\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 + 2\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot \\ &\cdot \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{P}}(u(\tau, x), v(\tau, x)) \right\|_{L_2(0,\ell)}^2 d\tau \leq 2\|w\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 + 10\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2} \right)^2 \cdot \left\{ \|a_1(t)\|_{L_2(0,T)}^2 + \|a_2(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \cdot C_0^{2\gamma} + \|a_3(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \cdot \right. \\
& \cdot C_0^2 + \|a_4(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \cdot \|v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^{2\gamma} \left. \right\} + 10 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2} \right)^2 \cdot \\
& \cdot \int_0^{\tau} a_5^2(\tau) \|v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 d\tau. \tag{1.151}
\end{aligned}$$

Отсюда, применив неравенство Р.Беллмана и пользуясь обозначениями (1.141), (1.142), для любого $u \in B_{2,T}^{1+i}$ получаем:

$$\|H_i(u)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 \equiv \|v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 \leq (\tilde{\mathcal{A}}_1 + \tilde{\mathcal{A}}_2 \|v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^{2\gamma}) \tilde{\mathcal{A}}_3. \tag{1.152}$$

Из (1.152), пользуясь обозначением (1.140), получаем:

$$\|H_i(u)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \equiv \|v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq C_2 \quad \forall u \in B_{2,T}^{1+i}. \tag{1.153}$$

Таким образом, из соотношений (1.150) и (1.152) следует, что для любого $u \in B_{2,T}^{1+i}$:

$$\|H_i(u)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \equiv \|v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq C = \min\{C_1, C_2\}, \tag{1.154}$$

т.е. оператор H_i отображает всё пространство $B_{2,T}^{1+i}$ в шар $\mathcal{K}(\|u\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq C)$ пространства $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$. Оператор H_i , определенный во всём пространстве $B_{2,T}^{1+i}$, рассмотрим только в шаре $\mathcal{K}^*(\|u\|_{B_{2,T}^{1+i}} \leq C)$ этого пространства. Тогда, в силу неравенства (1.153), для любого $u \in B_{2,T}^{1+i}$ имеем:

$$\|H_i(u)\|_{B_{2,T}^{1+i}} \leq \|H_i(u)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq C, \tag{1.155}$$

т.е. оператор H_i преобразует шар $\mathcal{K}^*$ в себя. Кроме того, как видно из (1.154):

$$H_i \mathcal{K}^* \subset \mathcal{K}(\|u\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq C) \subset B_{2,2,T}^{2+i,1+i}. \tag{1.156}$$

Так как, в силу теоремы 1.1, пространство $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ вкладывается в пространство $B_{2,T}^{1+i}$ вполне непрерывно, то из (1.156) следует, что множество $H_i \mathcal{K}^*$ компактно в $B_{2,T}^{1+i}$.

Теперь покажем непрерывность оператора H_i в шаре $\mathcal{K}^*$. Пусть $u_k, u_0 \in \mathcal{K}^*$, $u_k \xrightarrow{B_{2,T}^{1+i}} u_0$ при $k \rightarrow \infty$ и $H_i(u_k) = v_k$, $H_i(u_0) = v_0$. Тогда, пользуясь представлением

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{P}}(u_k(t, x), v_k(t, x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{P}}(u_0(t, x), v_0(t, x)) = \\ & = \left[\frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{P}}(u_k(t, x), v_k(t, x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{P}}(u_k(t, x), v_0(t, x)) \right] + \\ & + \left[\frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{P}}(u_k(t, x), v_0(t, x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{P}}(u_0(t, x), v_0(t, x)) \right] \quad (1.157) \end{aligned}$$

и неравенством (1.145), для $\forall t \in [0, T]$ имеем:

$$\begin{aligned} & \|H_i(u_k) - H_i(u_0)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 \equiv \|v_k - v_0\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 \leq \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \frac{(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell})^2}{\alpha^2\pi^4} \cdot \\ & \cdot \int_0^t \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{P}}(u_k(\tau, x), v_k(\tau, x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{P}}(u_0(\tau, x), v_0(\tau, x)) \right\|_{L_2(0,\ell)}^2 d\tau \leq \\ & \leq 2\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot \left\{ \int_0^t \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{P}}(u_k(\tau, x), v_k(\tau, x)) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{P}}(u_k(\tau, x), v_0(\tau, x)) \right\|_{L_2(0,\ell)}^2 d\tau + \int_0^t \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{P}}(u_k(\tau, x), v_0(\tau, x)) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{P}}(u_0(\tau, x), v_0(\tau, x)) \right\|_{L_2(0,\ell)}^2 d\tau \right\} \leq 2\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2. \end{aligned}$$

$$\cdot \left\{ \int_0^t b^2(\tau) \|v_k - v_0\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 d\tau + \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\Phi}(u_k(\tau, x), v_0(\tau, x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\Phi}(u_0(\tau, x), v_0(\tau, x)) \right\|_{L_2(D_T)}^2 \right\}. \quad (1.158)$$

Отсюда, применив неравенство Р.Беллмана, получаем:

$$\begin{aligned} \|H_i(u_k) - H_i(u_0)\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 &\leq 2 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \right)^2 \cdot \\ &\cdot \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\Phi}(u_k(\tau, x), v_0(\tau, x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\Phi}(u_0(\tau, x), v_0(\tau, x)) \right\|_{L_2(D_T)}^2 \cdot \\ &\cdot \exp \left\{ 2 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \right)^2 \|b(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (1.159)$$

Так как $v_0 = H_i(u_0) \in \mathcal{K}$ и для каждого фиксированного $v \in \mathcal{K}$ оператор $\tilde{\Phi}(u, v)$ действует из $B_{2,T}^{1+i}$ в $E_{\mathcal{K}}$ непрерывно, то из неравенства (1.159) следует, что оператор H_i действует из шара $\mathcal{K}^*$ пространства $B_{2,T}^{1+i}$ в $B_{2,2,T}^{1+i,1+i}$, а тем более в $B_{2,T}^{1+i}$ непрерывно. Таким образом, оператор H_i вполне непрерывно преобразует шар $\mathcal{K}^* \subset B_{2,T}^{1+i}$ в себя. Следовательно, в силу принципа Шаудера, оператор H_i имеет в шаре $\mathcal{K}^*$ по крайней мере одну неподвижную точку $\tilde{u}$:

$$B_{2,2,T}^{2+i,1+i} \ni \tilde{u} = H_i(\tilde{u}) = w + \mathcal{F}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\Phi}(\tilde{u}(t, x), \tilde{u}(t, x)) \right). \quad (1.160)$$

Далее, пользуясь неравенством (1.144) (для $u = v = \tilde{u}$), из соотношения (1.160) получаем, что для любого $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
& \|\tilde{u}\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 \leq 2\|w\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 + 2\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot \\
& \cdot \int_0^t \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{u}(\tau, x), \tilde{u}(\tau, x)) \right\|_{L_2(0, \ell)}^2 d\tau \leq 2\|w\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 + \\
& + 10\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot \|a_1(t)\|_{L_2(0, T)}^2 + 10\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \\
& \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot [\|a_2(t)\|_{L_2(0, T)}^2 + \|a_4(t)\|_{L_2(0, T)}^2] \cdot \\
& \cdot \|\tilde{u}\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^{2\gamma} + 10\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell}}{\alpha\pi^2}\right)^2 \cdot \\
& \cdot \int_0^t [a_3^2(\tau) + a_5^2(\tau)] \|\tilde{u}\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 d\tau. \tag{1.161}
\end{aligned}$$

Отсюда, применив неравенство Р.Беллмана и пользуясь обозначениями (1.135)-(1.137), получаем:

$$\|\tilde{u}\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 \leq (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \|\tilde{u}\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^{2\gamma}) \mathcal{A}_3. \tag{1.162}$$

Из (1.162), в силу обозначения (1.134), имеем:

$$\tilde{u}(t, x)_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq C_0.$$

Так как $\|\tilde{u}\|_{B_{2,2,T}^{1+i}} \leq \|\tilde{u}\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq C_0$, то $\tilde{u} \in \mathcal{H}_0$. Тогда из определения оператора $\tilde{\mathcal{F}}(u, v)$, т.е. из соотношения (1.143), следует, что

$$\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{u}, \tilde{u}) = \mathcal{F}(\tilde{u}, \tilde{u}) = \mathcal{F}(\tilde{u}). \tag{1.163}$$

Таким образом, соотношение (1.160) принимает следующий вид:

$$\tilde{u} = w + \mathcal{F}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(\tilde{u}(t, x)) \right), \tag{1.164}$$

т.е. $\tilde{u} \in B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ является неподвижной точкой оператора Q_i , определённого соотношением (1.116).

Далее, легко проверяется, что функция $\tilde{u}(t,x)$ является: при $i=0$ - обобщённым решением, при $i=1$ - решением почти всюду, а при $i=2$ - классическим решением задачи (1.1)-(1.3). Теорема доказана.

Из доказанной теоремы 1.7 при $i=0$, как простейший частный случай, вытекает следующее

Следствие 1.3. Пусть

1. Для $i=0$ выполнено условие 2 теоремы 1.4.
2. Оператор $\mathcal{F}$ порожден функцией $F(t,x,u,u_t,u_x,u_{tx},u_{xx})$, т.е.

$\mathcal{F}(u(t,x)) = F(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x))$, причём:

а) функция $F(t,x,u_1,\dots,u_5)$ определена в области $\mathcal{D}_T \times (-\infty, \infty)^5$, в этой же области удовлетворяет условиям Каратеодори и условию

$$|F(t,x,u_1,\dots,u_5)| \leq A_1(t,x) + A_2(t,x)(|u_1| + |u_2|) + A_3(t) \sum_{i=3}^5 |u_i|, \quad (1.165)$$

где $A_1(t,x), A_2(t,x) \in L_2(D_T)$, $A_3(t) \in L_2(0,T)$;

б) в области $\mathcal{D}_T \times \left[-\frac{\pi}{\sqrt{6}}C_0, \frac{\pi}{\sqrt{6}}C_0\right] \times (-\infty, \infty)^4$ выполняется

условие:

$$\begin{aligned} & |F(t,x,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) - F(t,x,u_1,v_2,u_3,v_4,v_5)| \leq \\ & \leq B_1(t,x)|u_2 - v_2| + B_2(t)[|u_4 - v_4| + |u_5 - v_5|], \end{aligned} \quad (1.166)$$

где $B_1(t,x) \in L_2(\mathcal{D}_T)$, $B_2(t) \in L_2(0,T)$, а число C_0 определено следующим соотношением:

$$\begin{aligned} C_0 \equiv & \left[\left[\|w(t,x)\|_{B_{2,2,T}^{2,1}}^2 + \frac{10(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell})^2}{\alpha^2\pi^4} \|a_1(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right] \cdot \right. \\ & \left. \cdot \exp \left[\frac{10(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell})^2}{\alpha^2\pi^4} (\|a_3(t)\|_{L_2(0,T)}^2 + \|a_5(t)\|_{L_2(0,T)}^2) \right] \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

причём

$$a_1(t) = A_1(t, x)_{L_2(0, \ell)}, \quad a_3(t) = \frac{\pi}{6} A_2(t, x)_{L_2(0, \ell)} + \frac{\pi}{2\ell} A_3(t),$$

$$a_5(t) = \frac{\pi}{6} A_2(t, x)_{L_2(0, \ell)} + \left(\frac{\pi}{2\ell} + \frac{\pi^2}{\ell \sqrt{2\ell}} \right) A_3(t).$$

Тогда задача (1.1)-(1.3) имеет обобщённое решение.

Доказательство. Для того, чтобы вывести это следствие из теоремы 1.7, достаточно определить оператор $\Phi(u, v)$, фигурирующий в условии 2 теоремы 1.7, следующим образом:

$$\Phi(u(t, x), v(t, x)) = F(t, x, u(t, x), V_t(t, x), u_x(t, x), V_{tx}(t, x), V_{xx}(t, x)). \quad (1.167)$$

$$\begin{aligned} \text{Очевидно, что } \forall u(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \in B_{2,T}^1, \quad v(t, x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \in B_{2,2,T}^{2,1}, \quad t \in [0, T] \text{ и } x \in [0, \ell]: \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |u(t, x)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (n \cdot \max_{0 \leq \tau \leq t} |u_n(\tau)|) \cdot \frac{1}{n} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \cdot \\ &\cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (n \cdot \max_{0 \leq \tau \leq t} |u_n(\tau)|)^2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|u\|_{B_{2,T}^1}, \end{aligned} \quad (1.168)$$

$$\begin{aligned} \|u_x(t, x)\|_{L_2(0, \ell)} &\leq \sqrt{\frac{\ell}{2}} \cdot \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (n \cdot u_n(t))^2} \leq \\ &\leq \frac{\pi}{\sqrt{2\ell}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (n \cdot \max_{0 \leq \tau \leq t} |u_n(\tau)|)^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2\ell}} \|u\|_{B_{2,T}^1}, \end{aligned} \quad (1.169)$$

$$|v_t(t, x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |g'_n(t)| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (n \cdot g'_n(t))^2} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|v\|_{B_{2,2,T}^{2,1}}, \quad (1.170)$$

$$\begin{aligned} \|v_x(t, x)\|_{L_2(0, \ell)} &\leq \sqrt{\frac{\ell}{2}} \cdot \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (n g'_n(t))^2} \leq \\ &\leq \frac{\pi}{\sqrt{2\ell}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (n \cdot \max_{0 \leq \tau \leq t} |g'_n(\tau)|)^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2\ell}} \|v\|_{B_{2,2,T}^{2,1}}, \end{aligned} \quad (1.171)$$

$$\|v_{xx}(t, x)\|_{L_2(0, \ell)} \leq \frac{\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{\ell}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 \cdot \max_{0 \leq \tau \leq t} |\vartheta_n(\tau)| \right)^2} \leq \frac{\pi^2}{\ell \sqrt{2\ell}} \|v\|_{B_{2,2,\ell}^{2,1}}. \quad (1.172)$$

Тогда, пользуясь неравенством (1.165) и оценками (1.168)-(1.172), $\forall u(t, x) \in B_{2,T}^1$, $v(t, x) \in B_{2,2,T}^{2,1}$ и $t \in [0, T]$ имеем:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(u(t, x), v(t, x))\|_{L_2(0, \ell)} &= \|F(t, x, u(t, x), v_t(t, x), u_x(t, x), \\ &\quad v_{xx}(t, x), v_{xx}(t, x))\|_{L_2(0, \ell)} \leq \|\mathcal{A}_1(t, x)\|_{L_2(0, \ell)} + \|\mathcal{A}_2(t, x)u(t, x)\|_{L_2(0, \ell)} + \\ &\quad + \|\mathcal{A}_2(t, x)v_t(t, x)\|_{L_2(0, \ell)} + \mathcal{A}_3(t) \left[\|u_x(t, x)\|_{L_2(0, \ell)} + \|v_{xx}(t, x)\|_{L_2(0, \ell)} + \right. \\ &\quad \left. + \|v_{xx}(t, x)\|_{L_2(0, \ell)} \right] \leq \|\mathcal{A}_1(t, x)\|_{L_2(0, \ell)} + \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|u\|_{B_{2,\ell}^1} \cdot \|\mathcal{A}_2(t, x)\|_{L_2(0, \ell)} + \\ &\quad + \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|v\|_{B_{2,2,\ell}^{2,1}} \cdot \|\mathcal{A}_2(t, x)\|_{L_2(0, \ell)} + \mathcal{A}_3(t) \left[\frac{\pi}{\sqrt{2\ell}} \|u\|_{B_{2,\ell}^1} + \frac{\pi}{\sqrt{2\ell}} \|v\|_{B_{2,2,\ell}^{2,1}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^2}{\ell \sqrt{2\ell}} \|v\|_{B_{2,2,\ell}^{2,1}} \right] = \|\mathcal{A}_1(t, x)\|_{L_2(0, \ell)} + \left[\frac{\pi}{\sqrt{6}} \|\mathcal{A}_2(t, x)\|_{L_2(0, \ell)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi}{\sqrt{2\ell}} \mathcal{A}_3(t) \right] \cdot \|u\|_{B_{2,\ell}^1} + \left[\frac{\pi}{\sqrt{6}} \|\mathcal{A}_2(t, x)\|_{L_2(0, \ell)} + \left(\frac{\pi}{\sqrt{2\ell}} + \frac{\pi^2}{\ell \sqrt{2\ell}} \right) \mathcal{A}_3(t) \right] \cdot \\ &\quad \cdot \|v\|_{B_{2,2,\ell}^{2,1}} = a_1(t) + a_3(t) \cdot \|u\|_{B_{2,\ell}^1} + a_5(t) \cdot \|v\|_{B_{2,2,\ell}^{2,1}}. \quad (1.173) \end{aligned}$$

Следовательно, выполнено для $i=0$ условие 2а теоремы 1.7, причём в этом случае $a_2(t) \equiv 0$, $a_4(t) \equiv 0$.

Далее, пользуясь неравенством (1.166), оценкой (1.168) и для $v = v_1 - v_2$ оценками (1.170)-(1.172), аналогично (1.173), $\forall u(t, x) \in \mathcal{H}_0$ $\left(\|u\|_{B_{2,T}^1} \leq C_0 \right)$, $v_1, v_2 \in B_{2,2,T}^{2,1}$ и $t \in [0, T]$ имеем:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(u(t, x), v_1(t, x)) - \mathcal{G}(u(t, x), v_2(t, x))\|_{L_2(0, \ell)} &= \|F(t, x, u(t, x), v_{1,t}(t, x), u_x(t, x), \\ &\quad v_{1,xx}(t, x), v_{1,xx}(t, x)) - F(t, x, u(t, x), v_{2,t}(t, x), u_x(t, x), v_{2,xx}(t, x), v_{2,xx}(t, x))\|_{L_2(0, \ell)} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \|B_1(t, x) \cdot (v_{1,t}(t, x) - v_{2,t}(t, x))\|_{L_2(0, \ell)} + B_2(t) \left[\|v_{1,tx}(t, x) - v_{2,tx}(t, x)\|_{L_2(0, \ell)} + \right. \\ &\quad \left. + \|v_{1,txx}(t, x) - v_{2,txx}(t, x)\|_{L_2(0, \ell)} \right] \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|v_1 - v_2\|_{B_{2,2,t}^{2,1}} \cdot \|B_1(t, x)\|_{L_2(0, \ell)} + \\ &\quad + B_2(t) \left[\frac{\pi}{\sqrt{2\ell}} \|v_1 - v_2\|_{B_{2,2,t}^{2,1}} + \frac{\pi^2}{\ell \sqrt{2\ell}} \|v_1 - v_2\|_{B_{2,2,t}^{2,1}} \right] = b(t) \cdot \|v_1 - v_2\|_{B_{2,2,t}^{2,1}}, \end{aligned}$$

где $b(t) = \frac{\pi}{6} B_1(t, x)_{L_2(0, \ell)} + \frac{\pi}{\ell \sqrt{2\ell}} (\ell + \pi) \cdot B_2(t) \in L_2(0, T)$.

Следовательно, выполнено для $i=0$ условие 2б теоремы 1.7.

Теперь покажем, что при условиях данного следствия выполнено и для $i=0$ условие 2в теоремы 1.7. На самом деле, пусть $v(t, x)$ - любая фиксированная функция из $B_{2,2,T}^{2,1}$, $u_n(t, x)$, $u_0(t, x) \in \mathcal{H}_0 \left(\|u\|_{B_{2,T}^1} \leq C_0 \right)$ и

$$u_n(t, x) \xrightarrow{B_{2,T}^1} u_0(t, x) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Тогда, в силу оценок (1.168), (1.169), $\forall n=0,1,2,\dots, t \in [0, T]$ и $x \in [0, \ell]$ имеем:

$$|u_n(t, x)| \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|u_n\|_{B_{2,t}^1} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|u_n\|_{B_{2,T}^1} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} C_0, \quad (1.174)$$

$$\|u_{n,x}(t, x)\|_{L_2(0, \ell)} \leq \frac{\pi}{\sqrt{2\ell}} \|u_n\|_{B_{2,t}^1} \leq \frac{\pi}{\sqrt{2\ell}} \|u_n\|_{B_{2,T}^1} \leq \frac{\pi}{\sqrt{2\ell}} C_0, \quad (1.175)$$

$$|u_n(t, x) - u_0(t, x)| \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|u_n - u_0\|_{B_{2,t}^1} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|u_n - u_0\|_{B_{2,T}^1}, \quad (1.176)$$

$$\|u_{n,x}(t, x) - u_{0,x}(t, x)\|_{L_2(0, \ell)} \leq \frac{\pi}{\sqrt{2\ell}} \|u_n - u_0\|_{B_{2,t}^1}. \quad (1.177)$$

Из (1.176) следует, что

$$u_n(t, x) \xrightarrow{q_T} u_0(t, x) \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (1.178)$$

а из (1.177) следует, что

$$u_{n,x}(t, x) \xrightarrow{q_T} u_{0,x}(t, x) \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (1.179)$$

Тогда, в силу известных свойств оператора Немыцкого, имеем:

$$\begin{aligned} & F(t, x, u_n(t, x), v_t(t, x), u_{n,x}(t, x), v_{tx}(t, x), v_{xx}(t, x)) \xrightarrow{\mathcal{D}_T} \\ & \Rightarrow F(t, x, u_0(t, x), v_t(t, x), u_{0,x}(t, x), v_{tx}(t, x), v_{xx}(t, x)) \text{ при } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

т.е.

$$\mathcal{G}(u_n(t, x), v(t, x)) \xrightarrow{\mathcal{D}_T} \mathcal{G}(u_0(t, x), v(t, x)) \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (1.180)$$

Далее, в силу неравенства (1.165), имеем:

$$\begin{aligned} & |\mathcal{G}(u_n(t, x), v(t, x))| = |F(t, x, u_n(t, x), v_t(t, x), u_{n,x}(t, x), v_{tx}(t, x), \\ & v_{xx}(t, x))| \leq \mathcal{A}_1(t, x) + \mathcal{A}_2(t, x) |u_n(t, x)| + \mathcal{A}_2(t, x) |v_t(t, x)| + \\ & + \mathcal{A}_3(t) |u_{n,x}(t, x)| + \mathcal{A}_3(t) [|v_{tx}(t, x)| + |v_{xx}(t, x)|] \leq \mathcal{A}_1(t, x) + \\ & + \frac{\pi}{\sqrt{6}} C_0 \cdot \mathcal{A}_2(t, x) + \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|v\|_{B_{2,2,T}^{2,1}} \cdot \mathcal{A}_2(t, x) + \mathcal{A}_3(t) |u_{n,x}(t, x) - \\ & - u_{0,x}(t, x)| + \mathcal{A}_3(t) |u_{0,x}(t, x)| + \mathcal{A}_3(t) [|v_{tx}(t, x)| + |v_{xx}(t, x)|] = \\ & = g(t, x) + \mathcal{A}_3(t) |u_{n,x}(t, x) - u_{0,x}(t, x)|, \end{aligned} \quad (1.181)$$

где

$$\begin{aligned} g(t, x) = & \mathcal{A}_1(t, x) + \frac{\pi}{\sqrt{6}} C_0 \mathcal{A}_2(t, x) + \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|v\|_{B_{2,2,T}^{2,1}} \cdot \mathcal{A}_2(t, x) + \\ & + \mathcal{A}_3(t) |u_{0,x}(t, x)| + \mathcal{A}_3(t) [|v_{tx}(t, x)| + |v_{xx}(t, x)|], \end{aligned}$$

причём $g(t, x) \in L_2(\mathcal{D}_T)$, ибо, пользуясь оценками (1.174)-(1.180) и (1.171), имеем:

$$\begin{aligned} \|g(t, x)\|_{L_2(D_T)} \leq & \|\mathcal{A}_1(t, x)\|_{L_2(D_T)} + \frac{\pi}{\sqrt{6}} (C_0 + \|v\|_{B_{2,2,T}^{2,1}}) \|\mathcal{A}_2(t, x)\|_{L_2(D_T)} + \\ & + \frac{\pi}{\sqrt{2\ell}} C_0 \|\mathcal{A}_3(t)\|_{L_2(0,T)} + \frac{\pi}{\ell\sqrt{2\ell}} (\ell + \pi) \cdot \|v\|_{B_{2,2,T}^{2,1}} \cdot \|\mathcal{A}_3(t)\|_{L_2(0,T)} < +\infty. \end{aligned}$$

В силу оценки (1.177) имеем:

$$\|\mathcal{A}_3(t) \cdot |u_{n,x}(t, x) - u_{0,x}(t, x)|\|_{L_2(D_T)} \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{\sqrt{2\ell}} \|u_n - u_0\|_{B_{2,T}^1} \cdot \|\mathcal{A}_3(t)\|_{L_2(0,T)} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (1.182)$$

Теперь, в силу соотношения (1.182) и соотношения $g(t, x) \in L_2(\mathcal{D}_T)$, из неравенства (1.181) следует, что функции семейства $\left\{ [\mathcal{P}(u_n(t, x), v(t, x))] \right\}_{n=1}^{\infty}$ имеют в $\mathcal{D}_T$ равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Таким образом,

$$\left\{ \mathcal{P}(u_n(t, x), v(t, x)) - \mathcal{P}(u_0(t, x), v(t, x)) \right\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{\mathcal{D}_T} 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

и функции семейства

$$\left\{ \mathcal{P}(u_n(t, x), v(t, x)) - \mathcal{P}(u_0(t, x), v(t, x)) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

имеют в $\mathcal{D}_T$ равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Отсюда, в силу теоремы Витали о предельном переходе под знаком интеграла Лебега, следует, что

$$\left\| \mathcal{P}(u_n, v) - \mathcal{P}(u_0, v) \right\|_{L_2(\mathcal{D}_T)} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Это означает, что для каждого фиксированного $v \in B_{2,2,T}^{2,1}$ оператор $\Phi(u, v)$ действует из $\mathcal{K}_0 \left(\|u\|_{B_{2,T}^1} \leq C_0 \right)$ в $L_2(\mathcal{D}_T)$ непрерывно. Следовательно, для $i = 0$ выполнено условие 2в теоремы 1.7. Тогда справедливость утверждения данного следствия следует из теоремы 1.7.

По идее доказательства теоремы 1.7. доказывается следующая

Теорема 1.8. Пусть

1. $i = 0, 1, 2$ и выполнено условие 2 теоремы 1.4.
2. $\mathcal{F}(u) = \mathcal{P}(u, u)$, где:

a) оператор $\mathcal{P}(u, v)$ действует из $B_{2,T}^{1+i} \times B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ в E_{x^i} , причём для любых $u \in B_{2,T}^{1+i}$, $v \in B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ и $t \in [0, T]$:

$$\left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{P}(u(t, x), v(t, x)) \right\|_{L_2(0,T)} \leq a_1(t) + a_2(t) \|u\|_{B_{2,T}^{1+i}} + a_3(t) \|v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}, \quad (1.183)$$

где $a_i(t) \in L_2(0, T)$ ($i = 1, 3$);

б) для любых $u \in \mathcal{K}_0 \left(\|u\|_{B_{2,T}^{1+i}} \leq C_0 \right)$ и $v_1, v_2 \in \mathcal{K}_1 \left(\|v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq C_0 \right)$

$$\left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \Phi(u(t, x), v_1(t, x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \Phi(u(t, x), v_2(t, x)) \right\|_{L_2(o, \ell)} \leq b(t) \|v_1 - v_2\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}, \quad (1.184)$$

где $b(t) \in L_2(0, T)$,

$$C_0 \equiv \left\{ \left[2 \|w\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 + 6 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \right)^2 \cdot \|a_1(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \cdot \exp \left[6 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \right)^2 \left(\|a_2(t)\|_{L_2(0,T)}^2 + \|a_3(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (1.185)$$

а функция $w(t, x)$ определена соотношением (1.52);

в) для каждого фиксированного $v \in \mathcal{K} \left(\|v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \leq C \right)$ оператор $\Phi(u, v)$ действует из шара $\mathcal{K}_0$ в E_x непрерывно, где

$$C \equiv \left\{ \left[2 \|w\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}}^2 + 6 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \right)^2 \cdot \left(\|a_1(t)\|_{L_2(0,T)}^2 + C_0^2 \cdot \|a_2(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right) \right] \cdot \exp \left[6 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \right)^2 \cdot \|a_3(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (1.186)$$

Тогда задача (1.1)-(1.3) имеет: при $i=0$ - обобщённое решение, при $i=1$ - решение почти всюду, а при $i=2$ - классическое решение.

Замечание 1.4. Следует отметить, что теоремами 1.7 и 1.8 охватывается и такой достаточно широкий класс случаев, когда операторы $Q_i (i=0, 1, 2)$, порожденные правой частью уравнения

$$(1.1) \text{ с помощью соотношения } Q_i(u) = w + \mathcal{P}_i \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u(t, x)) \right), \text{ в}$$

пространстве $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ не являются ни вполне непрерывными, ни удовлетворяющими условию Липшица и не распадающимися на сумму двух операторов, где один из этих операторов вполне непрерывен, а другой – сжатый. Другими словами, теоремами 1.7 и 1.8 охватываются и некоторые те случаи, когда для нахождения в $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ неподвижной точки оператора Q_i не применим ни принцип Шаудера, ни метод последовательных приближений (а тем более, принцип сжатых отображений), ни комбинированный принцип М.А.Красносельского и ни принцип ненулевого вращения.

§6. Корректность постановки задачи (1.1)-(1.3).

Теперь изучим корректность постановки задачи (1.1)-(1.3). Задачу (1.1)-(1.3) с данными $\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ назовем задачей $\tilde{\mathcal{A}}$. С помощью неравенства Р.Беллмана доказывается следующая

Теорема 1.9. Пусть

1. $i = 0, 1, 2$, и выполнено условие 2а теоремы 1.4 для функций φ и $\tilde{\varphi}$ и условие 2б теоремы 1.4 для функций ψ и $\tilde{\psi}$.
2. Операторы $\mathcal{F}$ и $\tilde{\mathcal{F}}$ действуют из $B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ в E_i , причём для любых $u, v \in B_{2,2,T}^{2+i,1+i}$ и $t \in [0, T]$:

$$\left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u(t, x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(v(t, x)) \right\|_{L_2(0, \ell)} \leq c(t) \|u - v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}},$$

$$c(t) \in L_2(0, T); \quad (1.187)$$

$$\left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{F}}(u(t, x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{F}}(v(t, x)) \right\|_{L_2(0, \ell)} \leq \tilde{c}(t) \cdot \|u - v\|_{B_{2,2,T}^{2+i,1+i}},$$

$$\tilde{c}(t) \in L_2(0, T). \quad (1.188)$$

$$3. \sup_{u \in B_{2,2,T}^{2+i,1+i}} \left\{ \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u(t, x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{F}}(u(t, x)) \right\|_{L_2(\mathcal{G}_T)} \right\} \equiv \varepsilon < +\infty. \quad (1.189)$$

Тогда для единственных: при $i = 0$ обобщённых решений, при $i = 1$ решений почти всюду, а при $i = 2$ классических решений $u(t, x)$ и $\tilde{u}(t, x)$, соответственно, задач (1.1)-(1.3) и $\tilde{\mathcal{A}}$, имеем:

$$\begin{aligned} \|u(t, x) - \tilde{u}(t, x)\|_{B_{2,2,\ell}^{2+i,1+i}} \leq & \left\{ 6 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \frac{\ell^3}{\pi^4} \|\varphi^{(2+i)}(x) - \tilde{\varphi}^{(2+i)}(x)\|_{L_2(0,\ell)}^2 + \right. \\ & + 6 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \frac{\ell(\ell^2 + \pi^2 \alpha)^2}{\alpha^2 \pi^6} \cdot \|\psi^{(1+i)}(x) - \tilde{\psi}^{(1+i)}(x)\|_{L_2(0,\ell)}^2 + \\ & + 6 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \frac{(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell})^2}{\alpha^2 \pi^4} \varepsilon^2 \Bigg] \cdot \\ & \cdot \exp \left[6 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \frac{(\ell\sqrt{2\ell T} + \pi\sqrt{\alpha\ell})^2}{\alpha^2 \pi^4} \|c(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right] \Bigg\}^{\frac{1}{2}}. \quad (1.190) \end{aligned}$$

Доказательство. Так как из условия 2 данной теоремы следуют условия 2 и 3 теоремы 1.6, то по этой же теореме 1.6 задачи (1.1)-(1.3) и $\tilde{\mathcal{A}}$ имеют единственные: при $i = 0$ обобщённые решения, при $i = 1$ решения почти всюду, а при $i = 2$ классические решения

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad \text{и} \quad \tilde{u}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

соответственно, причём в силу лемм 1.1 и 1.2, $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет: при $i = 0$ системе (1.21), при $i = 1$ системе (1.21a) и при $i = 2$ системе (1.21б), а $\{\tilde{u}_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет тем же системам, в которых нужно вместо φ_n, ψ_n и $\mathcal{F}(u)$ иметь в виду $\tilde{\varphi}_n, \tilde{\psi}_n$ и $\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{u})$ соответственно.

Пользуясь этим фактом, из систем (1.21), (1.21a) и (1.21б) легко получить, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\|u - \tilde{u}\|_{B_{2,2,\ell}^{2+i,1+i}}^2 \leq 3 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n - \tilde{\varphi}_n) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right\|_{B_{2,2,\ell}^{2+i,1+i}}^2 + 3 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell^2}{\alpha n^2 \pi^2} \right\|$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left\| \left[1 - \exp \left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t \right) \right] (\psi_n - \tilde{\psi}_n) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right\|_{B_{2,2}^{2+i,j+i}}^2 + \\
& + 3 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ell}{n\pi} \right)^i \cdot \frac{2\ell}{\alpha n^2 \pi^2} \int_0^t \int_0^\ell \left[\frac{\partial^i}{\partial \xi^i} \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \frac{\partial^i}{\partial \xi^i} \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{u}(\tau, \xi)) \right] \right. \\
& \cdot \left. \left[1 - \exp \left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau) \right) \right] \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right\|_{B_{2,2}^{2+i,j+i}}^2 \leq \\
& \leq 3 \sum_{n=1}^{\infty} (n^{2+i} (\varphi_n - \tilde{\varphi}_n))^2 + 3 \left[\frac{\ell^2}{\alpha \pi^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n^i (\psi_n - \tilde{\psi}_n))^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
& + \left. \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n^{1+i} (\psi_n - \tilde{\psi}_n))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 + 3 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \frac{(\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell})^2}{\alpha^2 \pi^4} \cdot \\
& \cdot \int_0^t \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u(\tau, x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{u}(\tau, x)) \right\|_{L_2(0, \ell)}^2 d\tau \leq 3 \sum_{n=1}^{\infty} (n^{2+i} (\varphi_n - \tilde{\varphi}_n))^2 + \\
& + 3 \sum_{n=1}^{\infty} (n^{1+i} (\psi_n - \tilde{\psi}_n))^2 \cdot \left(\frac{\ell^2}{\alpha \pi^2} + 1 \right)^2 + 6 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \left(\frac{\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell}}{\alpha \pi^2} \right)^2 \cdot \\
& \cdot \left[\int_0^t \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(u(\tau, x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{u}(\tau, x)) \right\|_{L_2(0, \ell)}^2 d\tau + \int_0^t \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(\tilde{u}(\tau, x)) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{u}(\tau, x)) \right\|_{L_2(0, \ell)}^2 d\tau \right] \leq 3 \sum_{n=1}^{\infty} (n^{2+i} (\varphi_n - \tilde{\varphi}_n))^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3 \frac{(\ell^2 + \alpha \pi^2)^2}{\alpha^2 \pi^4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (n^{1+i} (\psi_n - \tilde{\psi}_n))^2 + 6 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \frac{(\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell})^2}{\alpha^2 \pi^4} \cdot \\
& \cdot \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathcal{F}(\tilde{u}(\tau, x)) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{u}(\tau, x)) \right\|_{L_2(D_T)}^2 + 6 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \frac{(\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell})^2}{\alpha^2 \pi^4} \cdot \\
& \cdot \int_0^t c^2(\tau) \|u - \tilde{u}\|_{B_{2,2,\tau}^{2+i,1+i}}^2 d\tau \leq 6 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \frac{\ell^3}{\pi^4} \|\varphi^{(2+i)}(x) - \tilde{\varphi}^{(2+i)}(x)\|_{L_2(0,\ell)}^2 + \\
& + 6 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \frac{\ell(\ell^2 + \alpha \pi^2)^2}{\alpha^2 \pi^6} \cdot \|\psi^{(1+i)}(x) - \tilde{\psi}^{(1+i)}(x)\|_{L_2(0,\ell)}^2 + \\
& + 6 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \frac{(\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell})^2}{\alpha^2 \pi^4} \varepsilon^2 + 6 \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^{2i} \cdot \frac{(\ell \sqrt{2\ell T} + \pi \sqrt{\alpha \ell})^2}{\alpha^2 \pi^4} \cdot \\
& \cdot \int_0^t c^2(\tau) \|u - \tilde{u}\|_{B_{2,2,\tau}^{2+i,1+i}}^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Отсюда, применив неравенство Р.Беллмана, получаем справедливость оценки (1.190).

ГЛАВА II

Исследование почти всюду и классического решений одномерной смешанной задачи для одного класса полулинейных дифференциальных уравнений третьего порядка

Данная глава посвящена изучению вопросов единственности и существования почти всюду и классического решений следующей одномерной смешанной задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = F(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx}) \quad (0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \ell), \end{array} \right. \quad (2.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0, x) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq \ell), \quad u_t(0, x) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq \ell), \end{array} \right. \quad (2.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t, 0) = u(t, \ell) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \end{array} \right. \quad (2.3)$$

где $0 < T$, $\ell < +\infty$; $\alpha > 0$ - фиксированное число; F, φ, ψ - заданные функции, а $u(t, x)$ - искомая функция, причём почти всюду и классические решения задачи (2.1)-(2.3) понимаются в смысле, определяемом в §1 главы I.

Очевидно, что каждое решение почти всюду (и, тем более, классическое решение) задачи (2.1)-(2.3) имеет вид:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x,$$

где $u_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} u(t, x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx$ - коэффициенты Фурье искомого

решения $u(t, x)$ по полной в $L_2(0, \ell)$ системе $\left\{ \sin \frac{n\pi}{\ell} x \right\}_{n=1}^{\infty}$.

Далее, легко видеть, что после формального применения схемы метода Фурье, нахождение функций $u_n(t)$ сводится к решению следующей счётной системы нелинейных интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра второго рода:

$$u_n(t) = \varphi_n + \frac{\ell^2}{\alpha n^2 \pi^2} (1 - e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t}) \psi_n + \frac{2\ell}{\alpha n^2 \pi^2} \cdot \int_0^t \int_0^\ell F(\tau, \xi, u(\tau, \xi), u_\tau(\tau, \xi), u_\xi(\tau, \xi), u_{\tau\xi}(\tau, \xi), u_{\xi\xi}(\tau, \xi)) \cdot \left(1 - e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t-\tau)} \right) \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau \quad (t \in [0, T]; n = 1, 2, \dots), \quad (2.4)$$

где

$$\varphi_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx, \quad \psi_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \psi(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx.$$

Для краткости записи в дальнейшем будем пользоваться следующим обозначением:

$$\mathcal{F}(u(t, x)) = F(t, x, u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tx}(t, x), u_{xx}(t, x)). \quad (2.5)$$

Из системы (2.4), пользуясь обозначением (2.5), легко получить, что $\forall n$ ($n = 1, 2, \dots$) и $t \in [0, T]$:

$$u'_n(t) = e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t} \cdot \psi_n + \frac{2}{\ell} \cdot \int_0^t \int_0^\ell \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t-\tau)} \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau, \quad (2.6)$$

$$u''_n(t) = -\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} \cdot e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t} \cdot \psi_n - \frac{2\alpha n^2 \pi^2}{\ell^3} \cdot \int_0^t \int_0^\ell \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \cdot e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t-\tau)} \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau + \frac{2}{\ell} \cdot \int_0^t \mathcal{F}(u(t, \xi)) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi. \quad (2.7)$$

Кроме того, в данной главе будем пользоваться леммой 1.2, пространствами $B_{\beta_0, \dots, \beta_s, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_s}$, теоремой 1.1 и обозначениями

$$\|u\|_{B_{\beta_0, \dots, \beta_s, T}^{\alpha_0, \dots, \alpha_s}} = \sum_{i=0}^s \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \leq \tau \leq t} |u_n^{(i)}(\tau)| \right)^{\beta_i} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}}, \quad t \in [0, T]. \quad (2.8)$$

§1. Единственность решений задачи (2.1)-(2.3).

В этом параграфе доказывается следующая теорема о единственности (в целом) почти всюду и классического решений задачи (2.1)-(2.3).

Теорема 2.1. Пусть

1. Функция $F(t, x, u_1, \dots, u_5)$ непрерывна по совокупности своих переменных в замкнутой области $[0, T] \times [0, \ell] \times (-\infty, \infty)^5$.
2. Для каждого $R > 0$ и $\tau \in [0, T)$ существует такое $\delta_R(\tau)$ ($0 < \delta_R(\tau) \leq T - \tau$), что в области $(\tau, \tau + \delta_R(\tau)) \times (0, \ell) \times (-R, R)^5$

$$F(t, x, u_1, \dots, u_5) - F(t, x, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_5) \leq \sum_{i=1}^5 a_{i,R,\tau}(t) \cdot u_i - \tilde{u}_i, \quad (2.9)$$

где

$$(t - \tau)^{\frac{1}{2}} \cdot a_{1,R,\tau}(t), (t - \tau)^{\frac{1}{2}} \cdot a_{2,R,\tau}(t), (t - \tau) \cdot a_{3,R,\tau}(t), \\ a_{4,R,\tau}(t), (t - \tau)^{\frac{1}{2}} \cdot a_{5,R,\tau}(t) \in L_2(\tau, \tau + \delta_R(\tau)).$$

Тогда задача (2.1)-(2.3) не может иметь более одного решения почти всюду (и, тем более, классического решения).

Доказательство. Пусть $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x$ и

$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x$ - два любых решения почти всюду задачи (2.1)-(2.3). В силу леммы 1.2 из главы I, каждая из последовательностей $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{v_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет на $[0, T]$ системе (2.4), причём очевидно, что для $\{v_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ в правой части (2.4) везде вместо $u(\tau, \xi)$ нужно иметь в виду $v(\tau, \xi)$. Тогда из систем (2.4) и (2.6), пользуясь обозначениями (2.5) и (2.8), оценками

$$1 - e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau)} \leq 1, \quad n^2 \cdot \int_0^t e^{-\frac{2\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau)} d\tau \leq \frac{\ell^2}{2\alpha \pi^2} \quad (2.10)$$

(где $0 \leq \tau \leq t$) и тождеством Парсеваля, легко получить, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\|u - v\|_{B_{2,2,t}^{2,1}}^2 \leq 2 \left\{ \|u - v\|_{B_{2,t}^2}^2 + \|u_t - v_t\|_{B_{2,t}^1}^2 \right\} \leq 2 \cdot \frac{\ell}{\alpha \pi^2}.$$

$$\cdot \left(\frac{2\ell^2}{\alpha \pi^2} t + 1 \right) \cdot \int_0^t \int_0^\ell \{ \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \mathcal{F}(v(\tau, \xi)) \}^2 d\xi d\tau. \quad (2.11)$$

Так как $\mathcal{F}(u(t, x)), \mathcal{F}(v(t, x)) \in L_2(\mathcal{D}_T)$, то из (2.11) следует, что $u - v \in B_{2,2,T}^{2,1}$. Очевидно, что $\|u - v\|_{B_{2,2,0}^{2,1}} = 0$. Тогда естественно ввести обозначение:

$$t_0 \equiv \max \{ t \in [0, T] : \|u - v\|_{B_{2,2,t}^{2,1}} = 0 \}.$$

Очевидно, что $0 \leq t_0 \leq T$, $\forall n$ ($n = 1, 2, \dots$) и $t \in [0, t_0]$ $u_n(t) = v_n(t)$, $u'_n(t) = v'_n(t)$, и, следовательно, $\forall t \in [0, t_0]$ и $x \in [0, \ell]$ $u(t, x) = v(t, x)$. Таким образом:

$$\forall t \in [0, t_0], x \in [0, \ell] \quad \mathcal{F}(u(t, x)) - \mathcal{F}(v(t, x)) = 0. \quad (2.12)$$

Далее, очевидно, что существует такое число R ($0 < R < +\infty$), что всюду в $\mathcal{D}_T$:

$$\left. \begin{aligned} -R < u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tx}(t, x), u_{xx}(t, x) < R, \\ -R < v(t, x), v_t(t, x), v_x(t, x), v_{tx}(t, x), v_{xx}(t, x) < R. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Теперь предположим, что $0 \leq t_0 < T$. Тогда пользуясь соотношением (2.12) и последовательными оценками

$$\left[1 - \exp \left\{ -\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau) \right\} \right]^2 \leq \left[\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau) \right]^2,$$

$$\left[1 - \exp \left\{ -\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau) \right\} \right] \leq \frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau),$$

$$1 - \exp \left\{ -\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau) \right\} \leq 1,$$

$$\exp \left\{ -\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau) \right\} \leq 1,$$

$$\int_0^t \exp \left\{ -\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t - \tau) \right\} d\tau \leq \frac{\ell^2}{2\alpha n^2 \pi^2}$$

(для $\tau \leq t$), из систем (2.4) и (2.6), аналогично (2.11), легко получить, что $\forall t \in (t_0, T]$:

$$\|u - v\|_{B_{2,t}^0}^2 \leq \frac{2}{\ell} \cdot \frac{(t - t_0)^3}{3} \cdot \int_{t_0}^t \int_0^\ell \{ \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \mathcal{F}(v(\tau, \xi)) \}^2 d\xi d\tau, \quad (2.14)$$

$$\|u - v\|_{B_{2,t}^1}^2 \leq \frac{2}{\ell} \cdot \frac{\ell}{\alpha \pi^2} \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2} \cdot \int_{t_0}^t \int_0^\ell \{ \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \mathcal{F}(v(\tau, \xi)) \}^2 d\xi d\tau, \quad (2.15)$$

$$\|u - v\|_{B_{2,t}^2}^2 \leq \frac{2}{\ell} \left(\frac{\ell}{\alpha \pi^2} \right)^2 \cdot (t - t_0) \cdot \int_{t_0}^t \int_0^\ell \{ \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \mathcal{F}(v(\tau, \xi)) \}^2 d\xi d\tau, \quad (2.16)$$

$$\|u_t - v_t\|_{B_{2,t}^0}^2 \leq \frac{2}{\ell} \cdot (t - t_0) \cdot \int_{t_0}^t \int_0^\ell \{ \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \mathcal{F}(v(\tau, \xi)) \}^2 d\xi d\tau, \quad (2.17)$$

$$\|u_t - v_t\|_{B_{2,t}^1}^2 \leq \frac{2}{\ell} \cdot \frac{\ell^2}{\alpha \pi^2} \cdot \int_{t_0}^t \int_0^\ell \{ \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \mathcal{F}(v(\tau, \xi)) \}^2 d\xi d\tau. \quad (2.18)$$

Из неравенств (2.14)-(2.18) следует, что $\forall \varepsilon$ ($0 < \varepsilon \leq \delta_R(t_0) \leq T + \delta_R(t_0)$; а число R удовлетворяет условиям (2.13)):

$$\sup_{t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)} \left\{ (t - t_0)^{-3} \cdot \|u - v\|_{B_{2,t}^0}^2 \right\} \equiv A_{1,\varepsilon} < +\infty,$$

$$\sup_{t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)} \left\{ (t - t_0)^{-2} \cdot \|u - v\|_{B_{2,t}^1}^2 \right\} \equiv A_{2,\varepsilon} < +\infty,$$

$$\sup_{t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)} \left\{ (t - t_0)^{-1} \cdot \|u - v\|_{B_{2,t}^2}^2 \right\} \equiv A_{3,\varepsilon} < +\infty,$$

$$\sup_{t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)} \left\{ (t - t_0)^{-1} \cdot \|u_t - v_t\|_{B_{2,t}^0}^2 \right\} \equiv A_{4,\varepsilon} < +\infty,$$

$$\sup_{t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)} \left\{ \|u_t - v_t\|_{B_{2,t}^1}^2 \right\} \equiv A_{5,\varepsilon} < +\infty,$$

$$\sum_{i=1}^5 A_{i,\varepsilon} \leq C_0 \cdot \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} \int_0^\ell \left\{ \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) - \mathcal{F}(v(\tau, \xi)) \right\}^2 d\xi d\tau, \quad (2.19)$$

где

$$C_0 = \frac{2}{\ell} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell^2}{\alpha \pi^2} + \left(\frac{\ell^2}{\alpha \pi^2} \right)^2 + 1 + \frac{\ell^2}{2\alpha \pi^2} \right\}.$$

Из (2.19), пользуясь для $\tau = t_0$ неравенством (2.9), получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 A_{i,\varepsilon} &\leq 5C_0 \cdot \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} \left\{ a_{1,R,t_0}^2(\tau) \cdot \int_0^\ell [u(\tau, \xi) - v(\tau, \xi)]^2 d\xi + \right. \\ &\quad + a_{2,R,t_0}^2(\tau) \cdot \int_0^\ell [u_\tau(\tau, \xi) - v_\tau(\tau, \xi)]^2 d\xi + a_{3,R,t_0}^2(\tau) \cdot \\ &\quad \cdot \int_0^\ell [u_\xi(\tau, \xi) - v_\xi(\tau, \xi)]^2 d\xi + a_{4,R,t_0}^2(\tau) \cdot \int_0^\ell [u_{\tau\xi}(\tau, \xi) - v_{\tau\xi}(\tau, \xi)]^2 d\xi + \\ &\quad \left. + a_{5,R,t_0}^2(\tau) \cdot \int_0^\ell [u_{\xi\xi}(\tau, \xi) - v_{\xi\xi}(\tau, \xi)]^2 d\xi \right\} d\tau \leq \\ &\leq 5C_0 \cdot \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} \left\{ a_{1,R,t_0}^2(\tau) \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \|u - v\|_{B_{2,\tau}^0}^2 + a_{2,R,t_0}^2(\tau) \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \|u_t - v_t\|_{B_{2,\tau}^0}^2 + \right. \\ &\quad + a_{3,R,t_0}^2(\tau) \cdot \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^2 \cdot \frac{\ell}{2} \|u - v\|_{B_{2,\tau}^1}^2 + a_{4,R,t_0}^2(\tau) \cdot \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^2 \cdot \frac{\ell}{2} \|u_t - v_t\|_{B_{2,\tau}^1}^2 + \\ &\quad \left. + a_{5,R,t_0}^2(\tau) \cdot \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^4 \cdot \frac{\ell}{2} \|u - v\|_{B_{2,\tau}^2}^2 \right\} d\tau \leq 5C_0 \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} \left\{ (\tau - t_0)^3 \cdot \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot a_{1,R_0,t_0}^2(\tau) \cdot \mathcal{A}_{1,\varepsilon} + (\tau - t_0) \cdot a_{2,R_0,t_0}^2(\tau) \cdot \mathcal{A}_{4,\varepsilon} + \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \cdot (\tau - t_0)^2 \cdot \\
& \cdot a_{3,R_0,t_0}^2(\tau) \cdot \mathcal{A}_{2,\varepsilon} + \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \cdot a_{4,R_0,t_0}^2(\tau) \cdot \mathcal{A}_{5,\varepsilon} + \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4 \cdot (\tau - t_0) \cdot \\
& \cdot a_{5,R_0,t_0}^2(\tau) \cdot \mathcal{A}_{3,\varepsilon} \Big\} d\tau \leq \sum_{i=1}^5 \mathcal{A}_{i,\varepsilon} \cdot \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} b_{R,t_0}(\tau) d\tau, \quad (2.20)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
b_{R,t_0}(\tau) \equiv & 5C_0 \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \left\{ (\tau - t_0)^3 \cdot a_{1,R,t_0}^2(\tau) + (\tau - t_0) \cdot a_{2,R,t_0}^2(\tau) + \right. \\
& + \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \cdot (\tau - t_0)^2 \cdot a_{3,R,t_0}^2(\tau) + \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \cdot a_{4,R,t_0}^2(\tau) + \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4 \cdot (\tau - t_0) \cdot \\
& \left. \cdot a_{5,R,t_0}^2(\tau) \right\}.
\end{aligned}$$

Так как $b_{R,t_0}(\tau) \in L(t_0, t_0 + \delta_R(t_0))$, то можно выбрать такое $\varepsilon = \varepsilon_0$ ($0 < \varepsilon_0 \leq \delta_R(t_0)$), что $\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon_0} b_{R,t_0}(\tau) d\tau < 1$. Тогда из неравенства (2.20) получим, что

$$\sum_{i=1}^5 \mathcal{A}_{i,\varepsilon_0} = 0.$$

Следовательно, $\mathcal{A}_{1,\varepsilon_0} = \dots = \mathcal{A}_{5,\varepsilon_0} = 0$. Отсюда, в частности, следует, что $\|u - v\|_{B_{2,t_0+\varepsilon_0}^2} = 0$ и $\|u_i - v_i\|_{B_{2,t_0+\varepsilon_0}^1} = 0$, и, следовательно, $\|u - v\|_{B_{2,2,t_0+\varepsilon_0}^{2,1}} = 0$. А это, в силу положительности числа ε_0 , противоречит определению числа t_0 . Полученное противоречие показывает, что предположение $0 \leq t_0 < T$ было неверно, т.е. должно быть $t_0 = T$, т.е. $\|u - v\|_{B_{2,2,T}^{2,1}} = 0$. А отсюда следует, что всюду в $\mathcal{Q}_T$ $u(t, x) \equiv v(t, x)$. Теорема доказана.

Замечание 2.1. Для выполнения условия 2 теоремы 2.1 достаточно, чтобы для каждого $R > 0$ в области $(0, T) \times (0, \ell) \times (-R, R)^5$ выполнялось условие

$$\left| F(t, x, u_1, \dots, u_5) - F(t, x, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_5) \right| \leq \sum_{i=1}^5 a_{i,R}(t) \cdot |u_i - \tilde{u}_i|,$$

где для каждого $\tau \in [0, T)$ существует такое $\delta_R(\tau)$ ($0 < \delta_R(\tau) \leq T - \tau$), что $(t - \tau)^2 \cdot a_{1,R}(t), (t - \tau)^2 a_{2,R}(t), (t - \tau) a_{3,R}(t), a_{4,R}(t), (t - \tau)^2 \cdot a_{5,R}(t) \in L_2(\tau, \tau + \delta_R(\tau))$.

Отсюда видно, что коэффициенты Липшица $a_{1,R}(t), \dots, a_{5,R}(t)$ в отдельных точках (даже в счётном числе точек) множества $(0, T]$ слева могут иметь сколь угодно сильные особенности, а в отдельных точках (даже в счётном числе точек) множества $[0, T)$ могут иметь справа степенные особенности соответственно порядка $2 - \varepsilon, 1 - \varepsilon, \frac{3}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon$ и $1 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ - сколь угодно малое число.

§2. Существование в малом почти всюду и классического решений задачи (2.1)-(2.3).

В этом параграфе комбинированием метода последовательных приближений с принципом Шаудера доказаны теоремы существования в малом (т.е. справедливые при достаточно малых значениях T) почти всюду и классического решений задачи (2.1)-(2.3).

Теорема 2.2. Пусть

1. Функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0, \ell]$, $\varphi''(x) \in L_2(0, \ell)$ и $\varphi(0) = \varphi(\ell) = \varphi'(0) = \varphi'(\ell) = 0$;
функция $\psi(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0, \ell]$, $\psi''(x) \in L_2(0, \ell)$ и $\psi(0) = \psi(\ell) = 0$.

2. а) Функция $F(t, \xi_1, \dots, \xi_6)$ непрерывна в замкнутой области $\mathcal{D}_T \times (-\infty, \infty)^5$ вместе с производными $F_{\xi_i}(t, \xi_1, \dots, \xi_6)$ ($i=1,6$);

б) $\forall t \in [0, T]$ и $\xi_4, \xi_5 \in (-\infty, \infty)$

$$F(t, 0, 0, 0, \xi_4, \xi_5, 0) = F(t, \ell, 0, 0, \xi_4, \xi_5, 0) = 0.$$

Тогда существует в малом единственное в целом решение почти всюду задачи (2.1)-(2.3).

Доказательство. Для каждого фиксированного $u \in B_{1,1,T}^{2,1}$ рассмотрим в $B_{2,2,T}^{3,2}$ следующий оператор Q_u :

$$Q_u(v) = Z + \mathcal{P}(\mathcal{G}(u, v)), \quad (2.21)$$

где

$$Z(t, x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \varphi_n + \frac{\ell^2}{\alpha n^2 \pi^2} \left(1 - e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t} \right) \psi_n \right\} \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(w(t, x)) = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\ell^2}{\alpha n^3 \pi^3} \cdot \int_0^t \int_0^{\ell} w(\tau, \xi) \left(1 - e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t-\tau)} \right) \cdot \\ & \cdot \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(u(t, x), v(t, x)) = & F_{\xi_1}(t, x, u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tx}(t, x), u_{xx}(t, x)) + \\ & + F_{\xi_2}(t, x, u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tx}(t, x), u_{xx}(t, x)) \cdot u_x(t, x) + \\ & + F_{\xi_3}(t, x, u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tx}(t, x), u_{xx}(t, x)) \cdot u_{tx}(t, x) + \\ & + F_{\xi_4}(t, x, u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tx}(t, x), u_{xx}(t, x)) \cdot u_{xx}(t, x) + \\ & + F_{\xi_5}(t, x, u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tx}(t, x), u_{xx}(t, x)) \cdot v_{txx}(t, x) + \\ & + F_{\xi_6}(t, x, u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tx}(t, x), u_{xx}(t, x)) \cdot v_{xxx}(t, x), \end{aligned} \quad (2.24)$$

причём $\xi_1, \dots, \xi_6$ обозначения соответствующих аргументов функции $F(t, \xi_1, \dots, \xi_6)$.

Очевидно, что $\forall u(t, x) \in B_{2,2,T}^{3,2}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(u(t, x), u(t, x)) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \{F(t, x, u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tx}(t, x), u_{xx}(t, x))\}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Из условия 1 данной теоремы следует, что $Z(t, x) \in B_{2,2,T}^{3,2}$,
або

$$\begin{aligned} \|Z(t, x)\|_{B_{2,2,T}^{3,2}} &\leq \left\{ 2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} (n^3 \varphi_n)^2 + \frac{\ell^4}{\alpha^2 \pi^4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (n \psi_n)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 \psi_n)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq C \{ \|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,\ell)} + \|\psi''(x)\|_{L_2(0,\ell)} \} < +\infty. \end{aligned}$$

Далее, совершенно аналогично неравенству (2.11), для любых $u(t, x) \in B_{1,1,T}^{2,1}$ и $v(t, x) \in B_{2,2,T}^{3,2}$ имеем:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}(\mathcal{P}(u(t, x), v(t, x)))\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 &\leq 2 \cdot \frac{\ell}{\alpha \pi^2} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha \pi^2} \cdot T + 1 \right) \cdot \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^2 \cdot \\ &\cdot \int_0^T \int_0^\ell \{ \mathcal{P}(u(\tau, \xi), v(\tau, \xi)) \}^2 d\xi d\tau < +\infty, \end{aligned} \quad (2.26)$$

причём справедливость соотношения $\mathcal{P}(u(t, x), v(t, x)) \in L_2(\mathcal{D}_T)$ следует из того, что:

$$\forall u(t, x) \in B_{1,1,T}^{2,1} \quad \partial^s / \partial t^i \partial x^{s-i} u(t, x) \in C(\mathcal{D}_T) \quad (s = \overline{0, 2}; i = \overline{0, 1}), \quad (2.27)$$

$$\forall v(t, x) \in B_{2,2,T}^{3,2} \quad \|\partial^3 / \partial t^i \partial x^{3-i} v(t, x)\|_{L_2(0,\ell)}^2 \in C[0, T] \quad (i = \overline{0, 1}). \quad (2.28)$$

Таким образом, для каждого фиксированного $u \in B_{1,1,T}^{2,1}$ оператор Q_u , формально определённый соотношениями (2.21)-(2.24), действительно определён в пространстве $B_{2,2,T}^{3,2}$ и действует в нём.

Теперь, при любом фиксированном $u \in B_{1,1,T}^{2,1}$, аналогично (2.26), $\forall v_1, v_2 \in B_{2,2,T}^{3,2}$ и $t \in [0, T]$ имеем:

$$\|Q_u(v_1) - Q_u(v_2)\|_{B_{2,2,t}^{3,2}}^2 = \|\mathcal{A}(\mathcal{A}(u, v_1) - \mathcal{A}(u, v_2))\|_{B_{2,2,t}^{3,2}}^2 \leq \frac{2\ell^3}{\alpha\pi^4} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right) \cdot \int_0^t \int_0^\ell \{ \mathcal{A}(u(\tau, \xi), v_1(\tau, \xi)) - \mathcal{A}(u(\tau, \xi), v_2(\tau, \xi)) \}^2 d\xi d\tau. \quad (2.29)$$

Из (2.29), пользуясь соотношениями

$$\forall u \in B_{1,1,T}^{2,1} \left\| \partial^s / \partial t^i \partial x^{s-i} u(t, x) \right\|_{C(D_T)} \leq C \cdot \|u\|_{B_{1,1,T}^{2,1}} \quad (s = \overline{0,2}; i = 0,1) \quad (2.30)$$

$$\forall v \in B_{2,2,T}^{3,2} \int_0^\ell \{ \partial^3 / \partial \tau^i \partial \xi^{3-i} v(\tau, \xi) \}^2 d\xi \leq C \cdot \|v\|_{B_{2,2,\tau}^{3,2}}^2 \quad (i = 0,1), \quad (2.31)$$

получаем, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\|Q_u(v_1) - Q_u(v_2)\|_{B_{2,2,t}^{3,2}}^2 \leq C_u \cdot \int_0^t \|v_1 - v_2\|_{B_{2,2,\tau}^{3,2}}^2 d\tau, \quad (2.32)$$

где $C_u > 0$ - некоторая постоянная, не зависящая от v_1, v_2 и $t \in [0, T]$.

Повторно пользуясь неравенством (2.32), получаем, что

$\forall t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \|Q_u^2(v_1) - Q_u^2(v_2)\|_{B_{2,2,t}^{3,2}}^2 &= \|Q_u(Q_u(v_1)) - Q_u(Q_u(v_2))\|_{B_{2,2,t}^{3,2}}^2 \leq C_u \cdot \int_0^t \|Q_u(v_1) - \\ &- Q_u(v_2)\|_{B_{2,2,\tau}^{3,2}}^2 d\tau \leq C_u^2 \cdot \int_0^t \left\{ \int_0^\tau \|v_1 - v_2\|_{B_{2,2,\sigma}^{3,2}}^2 d\sigma \right\} d\tau \leq \\ &\leq C_u^2 \cdot \int_0^t \tau \cdot \|v_1 - v_2\|_{B_{2,2,\tau}^{3,2}}^2 d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|Q_u^3(v_1) - Q_u^3(v_2)\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 &\leq C_u \cdot \int_0^t \|Q_u^2(v_1) - Q_u^2(v_2)\|_{B_{2,2,\tau}^{3,2}}^2 d\tau \leq \\
&\leq C_u \cdot \int_0^t \left\{ \int_0^\tau \sigma \cdot \|v_1 - v_2\|_{B_{2,2,\sigma}^{3,2}}^2 d\sigma \right\} d\tau \leq C_u \cdot \int_0^t \left\{ \|v_1 - v_2\|_{B_{2,2,\tau}^{3,2}}^2 \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \int_0^\tau \sigma d\sigma \right\} d\tau = C_u \cdot \int_0^t \frac{\tau^2}{2} \cdot \|v_1 - v_2\|_{B_{2,2,\tau}^{3,2}}^2 d\tau,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|Q_u^k(v_1) - Q_u^k(v_2)\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 &\leq C_u \cdot \int_0^t \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} \|v_1 - v_2\|_{B_{2,2,\tau}^{3,2}}^2 d\tau \leq \\
&\leq C_u \cdot \|v_1 - v_2\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 \cdot \int_0^t \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} d\tau = C_u \cdot \frac{t^k}{k!} \cdot \\
&\quad \cdot \|v_1 - v_2\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 \leq \frac{(C_u \cdot T)^k}{k!} \cdot \|v_1 - v_2\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2.
\end{aligned}$$

Таким образом, при любом фиксированном $u \in B_{1,1,T}^{2,1}$, $\forall v_1, v_2 \in B_{2,2,T}^{3,2}$ и $k (k = 1, 2, \dots)$:

$$\|Q_u^k(v_1) - Q_u^k(v_2)\|_{B_{2,2,T}^{3,2}} \leq \frac{(C_u \cdot T)^k}{\sqrt{k!}} \cdot \|v_1 - v_2\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}. \quad (2.33)$$

Из (2.33) видно, что при любом фиксированном $u \in B_{1,1,T}^{2,1}$ оператор Q_u , действующий в пространстве $B_{2,2,T}^{3,2}$, удовлетворяет в нём условию Липшица, а его некоторая итерация (даже начиная с некоторого номера, зависящего от u , все итерации) является в $B_{2,2,T}^{3,2}$ сжатым. Следовательно, в силу обобщённого принципа сжатых отображений, оператор Q_u имеет в $B_{2,2,T}^{3,2}$ единственную неподвижную точку v :

$$v = Z + \mathcal{P}(\mathcal{P}(u, v)). \quad (2.34)$$

Таким образом, для каждого фиксированного $u \in B_{1,1,T}^{2,1}$ уравнение (относительно v) (2.34) имеет в $B_{2,2,T}^{3,2}$ единственное решение v . Сопоставив каждому $u \in B_{1,1,T}^{2,1}$ единственное решение $v \in B_{2,2,T}^{3,2}$ уравнения (2.34), получаем некоторый оператор H :

$$H(u) = v = Z + \mathcal{A}(\mathcal{G}(u, v)), \quad (2.35)$$

действующий из $B_{1,1,T}^{2,1}$ в $B_{2,2,T}^{3,2}$. Так как $B_{2,2,T}^{3,2} \subset B_{1,1,T}^{2,1}$, то оператор H действует в $B_{1,1,T}^{2,1}$. Покажем, что он действует в $B_{1,1,T}^{2,1}$ вполне непрерывно.

Пусть r - любое положительное число, а K_r - замкнутый шар пространства $B_{1,1,T}^{2,1}$ с центром в нуле и радиуса r . Тогда, пользуясь оценками (2.30) и (2.31), аналогично (2.26), легко получить, что $\forall u \in B_{1,1,T}^{2,1}$ и $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \|H(u)\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 &= \|v\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 \leq 2\|Z\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 + 2\|\mathcal{A}(\mathcal{G}(u, v))\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 \leq \\ &\leq 2\|Z\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 + \frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right) \cdot \int_0^t \int \{ \mathcal{G}(u(\tau, \xi), v(\tau, \xi)) \}^2 d\xi d\tau \leq \\ &\leq 2\|Z\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 + \frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right) \cdot \int_0^t \left\{ \mathcal{A}_r + B_r \cdot \|v\|_{B_{2,2,\tau}^{3,2}}^2 \right\} d\tau \leq \\ &\leq 2\|Z\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 + \frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right) \cdot \mathcal{A}_r \cdot T + \frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right) \cdot B_r \cdot \\ &\cdot \int_0^t \|v\|_{B_{2,2,\tau}^{3,2}}^2 d\tau, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где $\mathcal{A}_r > 0$, $B_r > 0$ - некоторые числа, зависящие от r . Из (2.36), применив неравенство Р.Беллмана, получаем, что $\forall u \in K_r$:

$$\|H(u)\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 = \|v\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 \leq \left\{ 2\|Z\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 + \frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right) \cdot \mathcal{A}_r \cdot T \right\}.$$

$$\exp\left\{\frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4}\left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2}\cdot T+1\right)\cdot B_r\cdot T\right\}\equiv C_r^2. \quad (2.37)$$

Из (2.37) следует, что множество $H\mathcal{K}_r$ ограничено в $B_{2,2,T}^{3,2}$. Покажем, что оно компактно в $B_{1,1,T}^{2,1}$. По определению оператора H :

$$\forall u \in \mathcal{K}_r \quad H(u) = v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x,$$

причём:

$$v_n(t) = \varphi_n + \frac{\ell^2}{\alpha n^2 \pi^2} \left(1 - e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t} \right) \psi_n + \frac{2\ell^2}{\alpha n^3 \pi^3} \cdot \int_0^t \int_0^{\ell} \mathcal{G}(u(\tau, \xi), v(\tau, \xi)) \left(1 - e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t-\tau)} \right) \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau. \quad (2.38)$$

Из (2.38) следует, что $\forall n$ ($n=1,2,\dots$) и $t \in [0, T]$:

$$v_n^*(t) = -\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} \cdot e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t} \cdot \psi_n + \frac{2}{n\pi} \int_0^t \mathcal{G}(u(t, \xi), v(t, \xi)) \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi - \\ - \frac{2\alpha n\pi}{\ell^2} \cdot \int_0^t \int_0^{\ell} \mathcal{G}(u(\tau, \xi), v(\tau, \xi)) \cdot e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t-\tau)} \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau. \quad (2.39)$$

Для каждого фиксированного n ($n=1,2,\dots$) совокупность n -ых компонент всех элементов множества $H\mathcal{K}_r$ (т.е. совокупность всех функций $v_n(t)$, определяемых формулами (2.38), когда u меняется на множестве $\mathcal{K}_r$) обозначим через $(H\mathcal{K}_r)_n$. Из (2.37) следует, что $\forall v_n(t) \in (H\mathcal{K}_r)_n$:

$$\|V_n(t)\|_{C[0,T]} \leq C_r, \quad \|V_n'(t)\|_{C[0,T]} \leq C_r. \quad (2.40)$$

Далее, пользуясь обозначениями $\mathcal{A}_r$ и B_r , использованными при получении неравенства (2.36), и оценкой (2.37), из (2.39) легко получить, что $\forall v_n(t) \in (H\mathcal{K}_r)_n$ и $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \|v_n''(t)\| &\leq \frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} \cdot |\psi_n| + \frac{2}{n\pi} \sqrt{\ell} \cdot \left\{ \int_0^\ell [\mathcal{G}(u(t, \xi), v(t, \xi))]^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \frac{2\alpha n\pi}{\ell^2} \cdot \sqrt{\ell} \cdot \int_0^t \left\{ \int_0^\ell [\mathcal{G}(u(t, \xi), v(t, \xi))]^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} d\tau \leq \frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} \cdot |\psi_n| + \\ &+ \frac{2}{n\pi} \cdot \sqrt{\ell} \cdot \left\{ \mathcal{A}_r + B_r \cdot \|v\|_{B_{2,2,t}^{3,2}}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{2\alpha n\pi}{\ell^2} \cdot \sqrt{\ell} \cdot \int_0^t \left\{ \mathcal{A}_r + B_r \cdot \|v\|_{B_{2,2,t}^{3,2}}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} d\tau \leq \\ &\leq \frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} \cdot |\psi_n| + \frac{2}{n\pi} \cdot \sqrt{\ell} \cdot \left\{ \mathcal{A}_r + B_r \cdot C_r^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{2\alpha n\pi}{\ell^2} \cdot \sqrt{\ell} \cdot T \cdot \\ &\cdot \left\{ \mathcal{A}_r + B_r \cdot C_r^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \equiv d_n(r), \end{aligned}$$

и, следовательно:

$$\|v_n''(t)\|_{C[0,T]} \leq d_n(r). \quad (2.41)$$

Из (2.40) и (2.41) следует, что множество $(H\mathcal{K}_r)_n$, как ограниченное в $C^{(2)}[0, T]$ множество, компактно в $C^{(1)}[0, T]$. А из ограниченности в $B_{2,2,T}^{3,2}$ множества $H\mathcal{K}_r$ следует, что для него, рассматриваемого как множество пространства $B_{1,1,T}^{2,1}$, выполнено условие б теоремы 1.1 главы I. Таким образом, последние два факта, в силу теоремы 1.1, обеспечивают компактность множества $H\mathcal{K}_r$ в $B_{1,1,T}^{2,1}$. Этим мы показали, что оператор H действует в пространстве $B_{1,1,T}^{2,1}$ компактно.

Теперь покажем непрерывность оператора H в $B_{1,1,T}^{2,1}$. Пусть $u_0(t, x)$ - любой элемент пространства $B_{1,1,T}^{2,1}$, а $\{u_k(t, x)\}_{k=1}^\infty$ - любая последовательность, составленная из элементов $B_{1,1,T}^{2,1}$ и сходя-

шаяся в $B_{1,1,T}^{2,1}$ к $u_0(t, x)$ при $k \rightarrow \infty$. Примем обозначения:
 $H(u_0) = v_0$ и $H(u_k) = v_k$ ($k = 1, 2, \dots$). Очевидно, что

$$\left\| \partial^s / \partial t^i \partial x^{s-i} u_k(t, x) \right\|_{C(\mathcal{G}_T)} \leq C_0 \left(s = \overline{0, 2}; i = 0, 1; k = 0, 1, 2, \dots \right), \quad (2.42)$$

$$\left\| \partial^s / \partial t^i \partial x^{s-i} (u_k(t, x) - u_0(t, x)) \right\|_{C(\mathcal{G}_T)} \rightarrow 0 \left(s = \overline{0, 2}; i = 0, 1 \right) \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (2.43)$$

Пользуясь соотношением (2.42), аналогично (2.39), $\forall k$ ($k = 1, 2, \dots$) и $t \in [0, T]$ имеем:

$$\begin{aligned} \|H(u_k) - H(u_0)\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 &= \|v_k - v_0\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 = \|\mathcal{A}(\mathcal{A}(u_k, v_k) - \mathcal{A}(u_0, v_0))\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 \leq \\ &\leq \frac{2\ell^3}{\alpha\pi^4} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right) \cdot \int_0^t \int_0^\ell \{ \mathcal{A}(u_k(\tau, \xi), v_k(\tau, \xi)) - \mathcal{A}(u_0(\tau, \xi), v_0(\tau, \xi)) \}^2 d\xi d\tau \leq \\ &\leq \frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right) \cdot \left[\int_0^t \int_0^\ell \{ \mathcal{A}(u_k(\tau, \xi), v_k(\tau, \xi)) - \mathcal{A}(u_k(\tau, \xi), v_0(\tau, \xi)) \}^2 d\xi d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \int_0^\ell \{ \mathcal{A}(u_k(\tau, \xi), v_0(\tau, \xi)) - \mathcal{A}(u_0(\tau, \xi), v_0(\tau, \xi)) \}^2 d\xi d\tau \right] \leq \\ &\leq \frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right) \cdot \|\mathcal{A}(u_k, v_0) - \mathcal{A}(u_0, v_0)\|_{L_2(D_T)}^2 + \\ &\quad + \frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right) \cdot C \cdot \int_0^t \|v_k - v_0\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 d\tau, \end{aligned} \quad (2.44)$$

где $C > 0$ - некоторая постоянная.

Из (2.44), применив неравенство Р.Беллмана, получаем, что $\forall k$ ($k = 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} \|H(u_k) - H(u_0)\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 &= \|v_k - v_0\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 \leq \frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right) \cdot \\ &\cdot \exp \left\{ \frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right) \cdot C \cdot T \right\}. \end{aligned}$$

$$\|\mathcal{G}(u_k(t, x), v_0(t, x)) - \mathcal{G}(u_0(t, x), v_0(t, x))\|_{L_2(\mathcal{D}_T)}^2. \quad (2.45)$$

Пользуясь соотношением (2.43), определением $\mathcal{G}(u, v)$, т.е. соотношением (2.24), и тем, что $v_{0,xx}(t, x), v_{0,xxx}(t, x) \in L_2(\mathcal{D}_T)$, легко показать, что

$$\|\mathcal{G}(u_k, v_0) - \mathcal{G}(u_0, v_0)\|_{L_2(\mathcal{D}_T)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.46)$$

Из (2.45), в силу (2.46), следует, что

$$\|H(u_k) - H(u_0)\|_{B_{1,1,T}^{3,2}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Этим доказано, что оператор H не только непрерывно действует в $B_{1,1,T}^{2,1}$, но и он непрерывно действует из $B_{1,1,T}^{2,1}$ в $B_{2,2,T}^{3,2}$.

Таким образом, доказано, что оператор H действует в пространстве $B_{1,1,T}^{2,1}$ вполне непрерывно.

Наконец, из неравенства (2.37) следует, что $\forall u \in \mathcal{K}_r$:

$$\begin{aligned} \|H(u)\|_{B_{1,1,T}^{2,1}}^2 &\leq \frac{\pi^2}{6} \cdot \|H(u)\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 \leq \frac{\pi^2}{6} \left\{ 2\|Z\|_{B_{2,2,T}^{1,2}}^2 + \frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right) \cdot \mathcal{A}_r \cdot T \right\} \\ &\cdot \exp \left\{ \frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right) \cdot B_r \cdot T \right\}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Из (2.47) видно, что для любого достаточно большого фиксированного r (например, для $r^2 > \frac{\pi^2}{3} Z_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2$) при достаточно малых значениях T правую часть (2.47) можно сделать $\leq r^2$. Таким образом, любой фиксированный замкнутый шар $\mathcal{K}_r$ пространства $B_{1,1,T}^{2,1}$ достаточно большого радиуса r при достаточно малых значениях T преобразуется в себя оператором H вполне непрерывно. Следовательно, в силу принципа Шаудера, при достаточно малых значениях T оператор H имеет в $B_{1,1,T}^{2,1}$ по крайней мере одну неподвижную точку u :

$$u = Z + \mathcal{P}(\mathcal{G}(u, u)). \quad (2.48)$$

Так как H действует из $B_{1,1,T}^{2,1}$ в $B_{2,2,T}^{3,2}$ и $H(u) = u$, то $u(t, x) \in B_{2,2,T}^{3,2}$. Тогда для найденной функции $u(t, x)$ справедливо равенство (2.25). Пользуясь равенством (2.25) и обозначением (2.5), равенству (2.48) можно придать следующий вид:

$$u(t, x) = Z(t, x) + \mathcal{F} \left(\frac{\partial}{\partial x} \{ \mathcal{F}(u(t, x)) \} \right). \quad (2.49)$$

Если принять обозначение $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x$, то, очевидно, что равенство (2.49) равносильно следующей системе:

$$u_n(t) = \varphi_n + \frac{\ell^2}{\alpha n^2 \pi^2} \left(1 - e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t} \right) \cdot \psi_n + \frac{2\ell^2}{\alpha n^3 \pi^3} \cdot \int_0^t \int_0^{\ell} \frac{\partial}{\partial \xi} \{ \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t-\tau)} \right) \cos \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau \quad (t \in [0, T]; n=1, 2, \dots). \quad (2.50)$$

Далее, если пользоваться условием 2σ данной теоремы, то (обратным интегрированием по частям по ξ один раз) системе (2.50) можно дать вид (2.4). Таким образом, коэффициенты Фурье $u_n(t)$ найденной неподвижной точки $u(t, x) \in B_{2,2,T}^{3,2}$ оператора H удовлетворяют на $[0, T]$ системе (2.4). Тогда справедливы (2.6) и (2.7). Из структуры пространства $B_{2,2,T}^{3,2}$ следует, что

$$u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{xx}(t, x), u_{xxx}(t, x) \in C(\mathcal{D}_T), \\ u_{xxx}(t, x), u_{xxx}(t, x) \in C([0, T]; L_2(0, \ell)).$$

Кроме того, очевидно, что

$$\mathcal{F}(u(t, x)) \in C(\mathcal{D}_T), \quad \frac{\partial}{\partial x} \{ \mathcal{F}(u(t, x)) \} \in C([0, T]; L_2(0, \ell))$$

и, в силу условия 2_6 данной теоремы,

$$\forall t \in [0, T] \quad \mathcal{F}(u(t, x))|_{x=0} = \mathcal{F}(u(t, x))|_{x=\ell} = 0.$$

Тогда очевидно, что при любом фиксированном $t \in [0, T]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \mathcal{F}(u(t, x)) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx \right\} \sin \frac{n\pi}{\ell} x = \mathcal{F}(u(t, x)) \quad \forall x \in [0, \ell],$$

т.е. всюду в $\mathcal{D}_T$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \mathcal{F}(u(t, \xi)) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi \right\} \sin \frac{n\pi}{\ell} x = \mathcal{F}(u(t, x)). \quad (2.51)$$

Далее, из систем (2.6) и (2.7), пользуясь равенством (2.51), легко получить, что при любом фиксированном $t \in [0, T]$

$$u_{tt}(t, x) = \alpha u_{txx}(t, x) + \mathcal{F}(u(t, x)) \quad (2.52)$$

для почти всех $x \in [0, \ell]$. Следовательно, равенство (2.52) имеет место почти всюду в $\mathcal{D}_T$, т.е. функция $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (2.1) почти всюду в $\mathcal{D}_T$. Из (2.52) также следует, что

$$u_{tt}(t, x) \in C([0, T]; L_2(0, \ell)).$$

Очевидно, что функция $u(t, x)$ удовлетворяет всем условиям (2.2) и (2.3) в обычном смысле. Таким образом, найденная функция $u(t, x)$ является решением почти всюду задачи (2.1)-(2.3).

А из условия 2а данной теоремы следует, что функция $F(t, x, u_1, \dots, u_5)$ удовлетворяет в области $\mathcal{D}_T \times (-\infty, \infty)^5$ локальному условию Липшица по $(u_1, \dots, u_5)$, причём с постоянными (не зависящими от t и x) коэффициентами Липшица. Тогда, в силу теоремы 2.1, задача (2.1)-(2.3) не может иметь более одного решения почти всюду. Таким образом, теорема доказана.

Замечание 2.2. Следует отметить, что единственное решение почти всюду $u(t, x)$ задачи (2.1)-(2.3) наряду со свойствами (требуемыми по определению) $u_{tt}(t, x), u_{txx}(t, x) \in L_2(\mathcal{D}_T)$ обладает более сильными свойствами:

$$u_{tt}(t, x), u_{txx}(t, x) \in C([0, T]; L_2(0, \ell)).$$

Теорема 2.3. Пусть

1. Функция $\varphi(x)$ трижды непрерывно дифференцируема на

$[0, \ell], \varphi^{IV}(x) \in L_2(0, \ell)$ и $\varphi(0) = \varphi(\ell) = \varphi'(0) = \varphi'(\ell) = 0$;

функция $\psi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0, \ell]$, $\psi'''(x) \in L_2(0, \ell)$ и $\psi(0) = \psi(\ell) = \psi'(0) = \psi'(\ell) = 0$.

2. а) Функция $F(t, x, u_1, \dots, u_5)$ дважды непрерывно дифференцируема по переменным $x, u_1, \dots, u_5$ в замкнутой области $\mathcal{D}_T \times (-\infty, \infty)$;

б) выполнено условие 2_б теоремы 2.2.

Тогда существует в малом единственное в целом классическое решение задачи (2.1)-(2.3).

Доказательство. Теорема доказывается по идее доказательства предыдущей теоремы 2.2. Поэтому укажем лишь схему доказательства данной теоремы. Для каждого фиксированного $u \in B_{1,1,T}^{3,2}$ рассмотрим в $B_{2,2,T}^{4,3}$ следующий оператор Q_u :

$$Q_u(v) = Z + \mathcal{P}(\mathcal{F}(u, v)),$$

где функция $Z(t, x)$ определена соотношением (2.22),

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(w(t, x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\ell^3}{\alpha n^4 \pi^4} \cdot \int_0^t \int_0^\ell w(\tau, \xi) \cdot \left(1 - e^{-\frac{\alpha \pi^2 \pi^2}{\ell^2}(t-\tau)} \right) \cdot \\ \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \end{aligned} \quad (2.53)$$

а функция $\mathcal{F}(u(t, x), v(t, x))$ отличается от

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \{F(t, x, u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tx}(t, x), u_{xx}(t, x))\} \quad (2.54)$$

лишь тем, что если в развёрнутом выражении (2.54) в двух (всего лишь имеющихсся) слагаемых линейные множители $u_{txx}(t, x)$ и $u_{xxx}(t, x)$ заменить соответственно множителями $v_{txx}(t, x)$ и $v_{xxx}(t, x)$, то получим $\mathcal{F}(u(t, x), v(t, x))$.

Тогда, очевидно, что:

$$\forall u(t, x) \in B_{2,2,T}^{4,3} \quad \mathcal{F}(u(t, x), u(t, x)) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{F}(u(t, x)). \quad (2.55)$$

Из условия 1 данной теоремы следует, что $Z(t, x) \in B_{2,2,T}^{4,3}$.

Далее, повторив схему доказательства теоремы 2.2 (лишь с той разницей, что везде нужно: вместо $B_{1,1,T}^{2,1}$ брать $B_{1,1,T}^{3,2}$, вместо

$B_{2,2,T}^{3,2}$ брать $B_{2,2,T}^{4,3}$, в оценках (2.6) и (2.9) справа добавить множи-

тель $\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2$, вместо $s = 0,2$ брать $s = 0,3$, а в (2.28) и (2.31) вместо

$\partial^3 / \partial t' \partial x^{3-i}$ брать $\partial^4 / \partial t' \partial x^{4-i}$), легко показать, что для каждого

фиксированного $u \in B_{1,1,T}^{3,2}$ уравнение

$$v = Z + \mathcal{P}(\mathcal{G}(u, v))$$

имеет в $B_{2,2,T}^{4,3}$ единственное решение v . Сопоставив каждому

$u \in B_{1,1,T}^{3,2}$ единственное решение $v \in B_{2,2,T}^{4,3}$ последнего уравнения,

получаем некоторый оператор H :

$$H(u) = v = Z + \mathcal{P}(\mathcal{G}(u, v)),$$

действующий из $B_{1,1,T}^{3,2}$ в $B_{2,2,T}^{4,3}$. Далее, как при доказательстве

теоремы 2.2 (с той лишь разницей, что вместо $B_{1,1,T}^{2,1}$ нужно брать

$B_{1,1,T}^{3,2}$, а вместо $B_{2,2,T}^{3,2}$ брать $B_{2,2,T}^{4,3}$), показывается, что оператор H

действует в пространстве $B_{1,1,T}^{3,2}$ вполне непрерывно и при доста-

точно малых значениях T имеет в $B_{1,1,T}^{3,2}$ по крайней мере одну не-

подвижную точку $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x$, принадлежащую даже

пространству $B_{2,2,T}^{4,3}$. Тогда для найденной функции $u(t, x)$ спра-

ведливо равенство (2.55). Пользуясь равенством (2.55) и обозна-

чением (2.5), равенству

$$u = H(u) = Z + \mathcal{P}(\mathcal{G}(u, u))$$

можно придать следующий вид:

$$u(t, x) = Z(t, x) + \mathcal{P} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ \mathcal{F}(u(t, x)) \} \right).$$

Отсюда, по определению оператора $\mathcal{P}$ (см.(2.53)), имеем:

$$u_n(t) = \varphi_n + \frac{\ell^2}{\alpha n^2 \pi^2} \left(1 - e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} t} \right) \cdot \psi_n - \frac{2\ell^3}{\alpha n^4 \pi^4} \cdot \int_0^t \int_0^\ell \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \cdot \{ \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2}{\ell^2} (t-\tau)} \right) \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi d\xi d\tau \quad (t \in [0, T]; n = 1, 2, \dots). \quad (2.56)$$

Далее, если пользоваться условием 2_б данной теоремы, то (обратным интегрированием по частям по ξ два раза) системе (2.56) можно придать вид (2.4). Таким образом, коэффициенты Фурье $u_n(t)$ найденной функции $u(t, x)$ удовлетворяют на $[0, T]$ системе (2.4). Тогда справедливы (2.6) и (2.7). Из структуры пространства $B_{2,2,T}^{4,3}$ следует, что

$$u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tx}(t, x), u_{xx}(t, x), u_{xxx}(t, x), \\ u_{xxx}(t, x) \in C(\mathcal{D}_T), u_{txx}(t, x), u_{xxx}(t, x) \in C([0, T]; L_2(0, \ell)).$$

Кроме того, очевидно, что

$$\mathcal{F}(u(t, x)), \frac{\partial}{\partial x} \{ \mathcal{F}(u(t, x)) \} \in C(\mathcal{D}_T), \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ \mathcal{F}(u(t, x)) \} \in C([0, T]; L_2(0, \ell))$$

и, в силу условия 2_б данной теоремы,

$$\forall t \in [0, T] \quad \mathcal{F}(u(t, x)) \Big|_{x=0} = \mathcal{F}(u(t, x)) \Big|_{x=\ell} = 0.$$

Тогда, пользуясь равенством (2.51) всюду в $\mathcal{D}_T$, из систем (2.6) и (2.7) легко получить, что при любом фиксированном $t \in [0, T]$ равенство (2.52) справедливо для любых $x \in [0, \ell]$, т.е. функция $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (2.1) всюду в $\mathcal{D}_T$. Из равенства (2.52), в частности, следует, что $u_{tt}(t, x) \in C(\mathcal{D}_T)$. Даже, в силу того, что $u_{txx}(t, x) \in C([0, T]; L_2(0, \ell))$ и $\frac{\partial}{\partial x} \{ \mathcal{F}(u(t, x)) \} \in C(\mathcal{D}_T)$, получаем, что

$$u_{tx}(t, x) \in C([0, T]; L_2(0, \ell)).$$

Очевидно, что функция $u(t, x)$ удовлетворяет всем условиям (2.2) и (2.3) в обычном смысле. Таким образом, найденная функ-

ция $u(t, x)$ является классическим решением задачи (2.1)-(2.3). А единственность классического решения задачи (2.1)-(2.3), как и при доказательстве предыдущей теоремы 2.2, следует из теоремы 2.1. Теорема доказана.

Замечание 2.3. Следует отметить, что найденное единственное классического решение $u(t, x)$ задачи (2.1)-(2.3) обладает и следующими дополнительными свойствами:

$$u_{xx}(t, x) \in C(\mathcal{D}_T), u_{txx}(t, x), u_{xxx}(t, x), u_{txx}(t, x) \in C([0, T]; L_2(0, \ell)).$$

§3. Существование в целом почти всюду и классического решений задачи (2.1)-(2.3) для слабо нелинейных уравнений.

В этом параграфе, пользуясь локальными (в малом) результатами предыдущего параграфа, методами априорных оценок доказаны следующие нелокальные (в целом) теоремы существования почти всюду и классического решений задачи (2.1)-(2.3).

Теорема 2.4. Пусть

1. Выполнены все условия теоремы 2.2.
2. В области $\mathcal{D}_T \times (-\infty, \infty)^5$:

$$\begin{aligned} |F(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx})|^{(*)} \leq & a(t, x) + \\ & + b(t, x) \cdot (|u| + |u_t| + |u_x|) + c(t) \cdot (|u_{tx}| + |u_{xx}|), \end{aligned} \quad (2.57)$$

где $a(t, x), b(t, x) \in L_2(\mathcal{D}_T)$, $c(t) \in L_2(0, T)$.

*) В дальнейшем в некоторых случаях для аргументов функции $F(\xi_1, \dots, \xi_7)$ мы сознательно будем пользоваться обозначениями $t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx}$, чтобы яснее представить себе соответствующий рост каждого (начиная с третьего) аргумента функции F , содержащего в правой части уравнения (2.1) соответствующие функции $u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx}$.

3. Для каждого $R > 0$ в области $\mathcal{D}_T \times [-R, R]^3 \times (-\infty, \infty)^2$:

$$\begin{aligned} |F_x(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx})| &\leq a_R(t, x) + b_R(t) \cdot (u_{tx}^2 + u_{xx}^2), \\ |F_u(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx})| &\leq a_R(t, x) + b_R(t) \cdot (u_{tx}^2 + u_{xx}^2), \\ |F_{u_t}(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx})| &\leq a_R(t, x) + b_R(t) \cdot (|u_{tx}| + |u_{xx}|), \\ |F_{u_x}(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx})| &\leq a_R(t, x) + b_R(t) \cdot (|u_{tx}| + |u_{xx}|), \\ |F_{u_{tx}}(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx})| &\leq b_R(t), \\ |F_{u_{xx}}(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx})| &\leq b_R(t), \end{aligned}$$

где $a_R(t, x) \in L_2(\mathcal{D}_T)$, $b_R(t) \in L_2(0, T)$.

Тогда задача (2.1)-(2.3) имеет единственное решение почти всюду.

Доказательство. По теореме 2.2 существует в малом единственное в целом решение почти всюду задачи (2.1)-(2.3). А для доказательства данной теоремы (как видно из процесса доказательства теоремы 2.2) достаточно установить априорную ограниченность в $B_{2,2,T}^{3,2}$ всевозможных решений почти всюду задачи (2.1)-(2.3), принадлежащих пространству $B_{2,2,T}^{3,2}$. Итак, пусть

$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x$ — любое решение почти всюду задачи

(2.1)-(2.3), принадлежащее пространству $B_{2,2,T}^{3,2}$. В силу леммы 1.2 из главы I, функции $u_n(t)$ удовлетворяют на $[0, T]$ системе (2.4). Тогда из систем (2.4) и (2.6), аналогично неравенству (2.11), получаем, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\|u\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 \leq 2\|Z\|_{B_{2,2,T}^{2,1}}^2 + \frac{4\ell}{\alpha\pi^2} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right) \cdot \int_0^t \int_0^\ell |\mathcal{F}(u(\tau, \xi))|^2 d\xi d\tau, \quad (2.58)$$

где функция $Z(t, x)$ определена соотношением (2.22), а оператор $\mathcal{F}$ определен соотношением (2.5). Пользуясь оценками

$$u^2(t, x) \leq \frac{\pi^2}{6} \cdot u_{B_{2,1,2,t}^{2,1}}^2, u_t^2(t, x) \leq \frac{\pi^2}{6} \cdot u_{B_{2,1,2,t}^{2,1}}^2, \\ u_x^2(t, x) \leq \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{6} \cdot u_{B_{2,1,2,t}^{2,1}}^2, \quad (2.59)$$

$$\int_0^\ell u_{tx}^2(t, x) dx \leq \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \cdot u_{B_{2,1,2,t}^{2,1}}^2, \quad \int_0^\ell u_{xx}^2(t, x) dx \leq \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4 \cdot u_{B_{2,1,2,t}^{2,1}}^2 \quad (2.60)$$

и неравенством (2.57), из (2.58) получаем, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \|u\|_{B_{2,2,t}^{2,1}}^2 &\leq 2\|Z\|_{B_{2,2,T}^{2,1}}^2 + \frac{24\ell}{\alpha\pi^2} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right) \cdot \|a(t, x)\|_{L_2(D_T)}^2 + \\ &+ \frac{24\ell}{\alpha\pi^2} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right) \cdot \int_0^t \left\{ \frac{\pi^2}{6} \left[2 + \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^2 \right] \cdot \int_0^\ell b^2(\tau, \xi) d\xi + \right. \\ &\left. + \left[\left(\frac{\pi}{\ell} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^4 \right] c^2(\tau) \right\} \cdot \|u\|_{B_{2,2,\tau}^{2,1}}^2 d\tau = C_1 + \int_0^t e(\tau) \cdot \|u\|_{B_{2,2,\tau}^{2,1}}^2 d\tau, \end{aligned} \quad (2.61)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &\equiv 2\|Z\|_{B_{2,2,T}^{2,1}}^2 + \frac{24\ell}{\alpha\pi^2} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right) \cdot \|a(t, x)\|_{L_2(D_T)}^2, \\ e(\tau) &\equiv \frac{24\ell}{\alpha\pi^2} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right) \cdot \left\{ \frac{\pi^2}{6} \left[2 + \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^2 \right] \cdot \int_0^\ell b^2(\tau, \xi) d\xi + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^2 \right] \cdot c^2(\tau) \right\} \in L(0, T). \end{aligned}$$

Из (2.61), применив неравенство Р. Беллмана, получаем:

$$\|u\|_{B_{2,2,t}^{2,1}}^2 \leq C_1 \cdot \exp \left\{ \int_0^t e(\tau) d\tau \right\} \equiv C_2, \quad (2.62)$$

т.е. всевозможные решения почти всюду $u(t, x) \in B_{2,2,T}^{3,2}$ задачи (2.1)-(2.3) априори ограничены в $B_{2,2,T}^{2,1}$.

Из априорной оценки (2.62), в силу оценок (2.59) и (2.60), следует справедливость следующих априорных оценок:

$$\|u(t, x)\|_{C(D_T)} \leq R, \|u_t(t, x)\|_{C(D_T)} \leq R, \|u_x(t, x)\|_{C(D_T)} \leq R, \quad (2.63)$$

$$\int_0^t u_{xx}^2(t, x) dx \leq C_3, \quad \int_0^t u_{xx}^2(t, x) dx \leq C_3 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.64)$$

Далее, при условиях данной теоремы, очевидно, что система (2.4) равносильна системе (2.50). Тогда из системы (2.50), аналогично (2.36), получаем, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\|u\|_{B_{2,2,t}^{3,2}}^2 \leq 2\|Z\|_{B_{2,2,t}^{3,2}}^2 + \frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right) \cdot \int_0^t \int_0^\ell \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} [\mathcal{F}(u(\tau, \xi))] \right\}^2 d\xi d\tau. \quad (2.65)$$

Пользуясь априорными оценками (2.64), для любого $t \in [0, T]$ имеем:

$$\int_0^\ell u_{xx}^4(t, x) dx \leq \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{6} \cdot u_{B_{2,2,t}^{3,2}}^2 \cdot \int_0^\ell u_{xx}^2(t, x) dx \leq C_4 \cdot u_{B_{2,2,t}^{3,2}}^2, \quad (2.66)$$

$$\int_0^\ell u_{xx}^2(t, x) \cdot u_{xx}^2(t, x) dx \leq \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{6} \cdot u_{B_{2,2,t}^{3,2}}^2 \cdot \int_0^\ell u_{xx}^2(t, x) dx \leq C_4 \cdot u_{B_{2,2,t}^{3,2}}^2, \quad (2.67)$$

$$\int_0^\ell u_{xx}^4(t, x) dx \leq \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^4 \cdot \frac{\pi^2}{6} \|u\|_{B_{2,2,t}^{3,2}}^2 \cdot \int_0^\ell u_{xx}^2(t, x) dx \leq C_4 \cdot \|u\|_{B_{2,2,t}^{3,2}}^2. \quad (2.68)$$

С другой стороны, для любых $t \in [0, T]$ и $x \in [0, \ell]$ имеем:

$$u_{xx}^2(t, x) \leq \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{6} \cdot u_{B_{2,2,t}^{3,2}}^2, \quad u_{xx}^2(t, x) \leq \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^4 \cdot \frac{\pi^2}{6} \cdot u_{B_{2,2,t}^{3,2}}^2, \quad (2.69)$$

$$\int_0^{\ell} u_{xx}^2(t, x) dx \leq \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4 \cdot \frac{\ell}{2} u_{B_{2,2,\ell}^{3,2}}^2, \quad \int_0^{\ell} u_{xxx}^2(t, x) dx \leq \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^6 \cdot \frac{\ell}{2} u_{B_{2,2,\ell}^{3,2}}^2. \quad (2.70)$$

Теперь, представив себе развернутое выражение

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \{F(u(\tau, \xi))\} \equiv \frac{\partial}{\partial \xi} \{F(\tau, \xi, u(\tau, \xi), u_{\tau}(\tau, \xi), u_{\xi}(\tau, \xi), u_{\tau\xi}(\tau, \xi), u_{\xi\xi}(\tau, \xi))\}.$$

пользуясь априорными оценками (2.63), условием 3 данной теоремы и оценками (2.66)-(2.70), из (2.65) легко получить, что $\forall t \in [0, T]$:

$$u_{B_{2,2,\ell}^{3,2}}^2 \leq C_5 + \int_0^t C_6(\tau) \cdot u_{B_{2,2,\ell}^{3,2}}^2 d\tau, \quad (2.71)$$

где $C_5 > 0$ - некоторое постоянное, $0 \leq C_6(\tau) \in L(0, T)$.

Из (2.71), применив неравенство Р.Беллмана, получаем справедливость априорной оценки:

$$\|u(t, x)\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 \leq C_5 \cdot \exp \left\{ \int_0^T C_6(\tau) d\tau \right\} \equiv C_6. \quad (2.72)$$

Этим теорема доказана.

Теорема 2.5. Пусть

1. Выполнены все условия теоремы 2.3.
2. Выполнены условия 2 и 3 теоремы 2.4.

Тогда задача (2.1)-(2.3) имеет единственное классическое решение.

Доказательство. По теореме 2.3 существует в малом единственное в целом классическое решение задачи (2.1)-(2.3). Как видно из процесса доказательства теоремы 2.3, для доказательства данной теоремы 2.5 достаточно установить априорную ограниченность в $B_{2,2,T}^{4,3}$ всевозможных классических решений задачи

(2.1)-(2.3), принадлежащих пространству $B_{2,2,T}^{4,3}$. Пусть

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x - \text{любое классическое решение задачи}$$

(2.1)-(2.3), принадлежащее пространству $B_{2,2,T}^{4,3}$. В силу леммы 1.2 из главы I, функции $u_n(t)$ удовлетворяют на $[0, T]$ системе (2.4). Очевидно, что при условиях данной теоремы система (2.4) эквивалентна системе (2.50), а последняя система, в свою очередь, эквивалентна системе (2.56). Тогда из системы (2.56), аналогично (2.65), получаем, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\|u\|_{B_{2,2,T}^{4,3}}^2 \leq 2\|Z\|_{B_{2,2,T}^{4,3}}^2 + \frac{4\ell^5}{\alpha\pi^6} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right) \cdot \int_0^t \int_0^\ell \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} [\mathcal{F}(u(\tau, \xi))] \right\}^2 d\xi d\tau. \quad (2.73)$$

Так как каждое классическое решение задачи (2.1)-(2.3) является и её решением почти всюду, то, как видно из процесса доказательства предыдущей теоремы, априорная оценка (2.72) справедлива и для всевозможных классических решений $u(t, x)$ задачи (2.1)-(2.3), принадлежащих пространству $B_{2,2,T}^{4,3}$. Тогда, в силу априорной оценки (2.72), из (2.69) и (2.70) следует справедливость следующих априорных оценок:

$$\|u_{xx}(t, x)\|_{C(\mathcal{G}_T)} \leq C_7, \quad \|u_{xx}(t, x)\|_{C(\mathcal{G}_T)} \leq C_7, \quad (2.74)$$

$$\int_0^\ell u_{xx}^2(t, x) dx \leq C_7, \quad \int_0^\ell u_{xxx}^2(t, x) dx \leq C_7 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.75)$$

Пользуясь априорными оценками (2.75), $\forall t \in [0, T]$ имеем:

$$\int_0^\ell u_{xxx}^4(t, x) dx \leq \left(\frac{\pi^2}{\ell^2} \right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{6} \cdot \|u\|_{B_{2,2,t}^{4,3}}^2 \cdot \int_0^\ell u_{xxx}^2(t, x) dx \leq C_8 \cdot \|u\|_{B_{2,2,t}^{4,3}}^2, \quad (2.76)$$

$$\int_0^\ell u_{xxx}^2(t, x) \cdot u_{xxx}^2(t, x) dx \leq \left(\frac{\pi^2}{\ell^2} \right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{6} \cdot \|u\|_{B_{2,2,t}^{4,3}}^2 \cdot \int_0^\ell u_{xxx}^2(t, x) dx \leq C_8 \cdot \|u\|_{B_{2,2,t}^{4,3}}^2, \quad (2.77)$$

$$\int_0^{\ell} u_{xxx}^4(t, x) dx \leq \left(\frac{\pi^3}{\ell^3} \right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{6} \cdot u_{B_{2,2,t}^{4,3}}^2 \cdot \int_0^{\ell} u_{xxx}^2(t, x) dx \leq C_8 \cdot u_{B_{2,2,t}^{4,3}}^2. \quad (2.78)$$

С другой стороны, очевидно, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\int_0^{\ell} u_{xxx}^2(t, x) dx \leq \left(\frac{\pi^3}{\ell^3} \right)^2 \cdot \frac{\ell}{2} \|u\|_{B_{2,2,t}^{4,3}}^2, \quad \int_0^{\ell} u_{xxx}^2(t, x) dx \leq \left(\frac{\pi^4}{\ell^4} \right)^2 \cdot \frac{\ell}{2} \|u\|_{B_{2,2,t}^{4,3}}^2. \quad (2.79)$$

Теперь, представив себе развёрнутое выражение

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \{ \mathcal{F}(u(\tau, \xi)) \} \equiv \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \{ F(\tau, \xi, u(\tau, \xi), u_{\tau}(\tau, \xi), u_{\xi}(\tau, \xi), u_{\tau\xi}(\tau, \xi), u_{\xi\xi}(\tau, \xi)) \},$$

имея в виду априорные оценки (2.63) и (2.74), а также пользуясь оценками (2.76)-(2.79), из (2.73) легко получить, что $\forall t \in [0, T]$:

$$u_{B_{2,2,t}^{4,3}}^2 \leq C_9 + C_{10} \cdot \int_0^t u_{B_{2,2,\tau}^{4,3}}^2 d\tau, \quad (2.80)$$

где $C_9 > 0$ и $C_{10} > 0$ - некоторые постоянные, не зависящие от u и t . Из (2.80), применив неравенство Р.Беллмана, получаем справедливость априорной оценки:

$$\|u(t, x)\|_{B_{2,2,T}^{4,3}}^2 \leq C_9 \cdot \exp\{C_{10} \cdot T\} \equiv C_{11}. \quad (2.81)$$

Этим теорема доказана.

§4. Существование в целом почти всюду и классического решений задачи (2.1)-(2.3) для сильно нелинейных уравнений.

В этом параграфе рассматривается следующий специальный вид уравнения (2.1):

$$u_{tt} - \alpha u_{xxx} = \sigma'(u_x) \cdot u_{xx} + f(x, u) + F(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx}) \quad (0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq \ell) \quad (2.82)$$

и доказываются теоремы существования в целом почти всюду и классического решений задачи (2.82), (2.2), (2.3) для достаточно широкого класса уравнений (2.82), правая часть которых по пе-

ременным u, u_t и u_x может иметь при $|u| + |u_t| + |u_x| \rightarrow \infty$ рост выше линейного.

Теорема 2.6. Пусть

1. Выполнено условие 1 теоремы 2.2.
2. а) Функция $\sigma(y)$ дважды непрерывно дифференцируема на $(-\infty, \infty)$;

$$\text{б) } \sigma(0) = 0 \text{ и } \sigma'(y) \geq 0 \quad \forall y \in (-\infty, \infty). \quad (2.83)$$

3. а) Функция $f(x, u)$ непрерывно дифференцируема по совокупности своих переменных в замкнутой области $[0, \ell] \times (-\infty, \infty)$;

$$\text{б) } f(0, 0) = f(\ell, 0) = 0;$$

$$\text{в) в замкнутой области } [0, \ell] \times (-\infty, \infty)$$

$$\int_0^u f(x, \xi) d\xi \equiv g(x, u) \leq C \cdot (1 + u^2) - g_0(u), \quad (2.84)$$

где $C > 0$ - некоторая постоянная, а функция $g_0(u) \geq 0$ непрерывна на $(-\infty, \infty)$.

4. а) Выполнено условие 2 теоремы 2.2;

$$\text{б) в области } \mathcal{D}_T \times (-\infty, \infty)^5:$$

$$F(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx}) \cdot u_t \leq C \cdot \{1 + g_0(u) + u^2 + u_t^2 + u_x^2\} + \varepsilon_0 \cdot u_{tx}^2, \quad \varepsilon_0 < \alpha, \quad (2.85)$$

где $C > 0$ - некоторая постоянная, $g_0(u)$ - функция, фигурирующая в (2.84), а $\alpha > 0$ - число, фигурирующее в уравнении (2.82);

$$\text{в) } \forall R > 0 \text{ в области } \mathcal{D}_T \times [-R, R] \times (-\infty, \infty)^4:$$

$$\begin{aligned} & -F(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx}) \cdot u_{xx} \leq \\ & \leq C_R \cdot \{1 + u_t^4 + u_x^4 + u_{tx}^2 + u_{tx}^2 \cdot u_x^2 + u_{xx}^2 + u_{xx}^2 \cdot u_t^2\}, \end{aligned} \quad (2.86)$$

где $C_R > 0$ - некоторая постоянная;

$$\text{г) } \forall R > 0 \text{ в области } \mathcal{D}_T \times [-R, R] \times (-\infty, \infty) \times [-R, R] \times (-\infty, \infty)^2:$$

$$|F(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx})| \leq$$

$$\leq C_R \cdot \{1 + |u_t|^3 + |u_{tx}| + |u_{tx}| \cdot |u_t| + |u_{xx}| + |u_{xx}| \cdot u_t^2\}, \quad (2.87)$$

где $C_R > 0$ - некоторая постоянная;

д) выполнено условие 3 теоремы 2.4.

Тогда задача (2.82), (2.2), (2.3) имеет единственное решение почти всюду.

Доказательство. Как мы уже знаем, для доказательства данной теоремы достаточно показать, что всевозможные решения почти всюду $u(t, x)$ задачи (2.82), (2.2), (2.3), принадлежащие пространству $B_{2,2,T}^{3,2}$, в нём априори ограничены. С этой целью умножим обе части уравнения (2.82) на функцию $u_t(t, x)$, проинтегрируем полученное равенство по x от 0 до ℓ и произведем интегрирование по частям по x один раз во втором слагаемом левой части. Тогда $\forall t \in [0, T]$ получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \int_0^\ell u_t^2(t, x) dx + \alpha \cdot \int_0^\ell u_{tx}^2(t, x) dx = \\ & = \int_0^\ell \sigma'(u_x(t, x)) \cdot u_{xx}(t, x) \cdot u_t(t, x) dx + \int_0^\ell f(x, u(t, x)) \cdot u_t(t, x) dx + \\ & + \int_0^\ell F(t, x, u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tx}(t, x), u_{xx}(t, x)) \cdot u_t(t, x) dx = \\ & = - \int_0^\ell \sigma(u_x(t, x)) \cdot u_{tx}(t, x) dx + \frac{d}{dt} \int_0^\ell g(x, u(t, x)) dx + \\ & + \int_0^\ell F(t, x, u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tx}(t, x), u_{xx}(t, x)) \cdot u_t(t, x) dx, \quad (2.88) \end{aligned}$$

где $g(x, u)$ - функция, фигурирующая в (2.84), т.е. $g'_u(x, u) = f(x, u)$.

Интегрируя равенство (2.88) по t от 0 до t и пользуясь неравенствами (2.84), (2.85), получаем, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^\ell u_t^2(t, x) dx + \alpha \int_0^t \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx d\tau \leq \frac{1}{2} \int_0^\ell \psi^2(x) dx - \\
& - \int_0^t \int_0^\ell \sigma(u_x(\tau, x)) u_{xx}(\tau, x) dx d\tau + C \cdot \int_0^\ell \{1 + u^2(t, x)\} dx - \\
& - \int_0^\ell g_0(u(t, x)) dx - \int_0^\ell g(x, \varphi(x)) dx + C \cdot \ell \cdot t + C \cdot \\
& \cdot \left\{ \int_0^t \int_0^\ell g_0(u(\tau, x)) dx d\tau + \int_0^t \int_0^\ell u^2(\tau, x) dx d\tau + \int_0^t \int_0^\ell u_\tau^2(\tau, x) dx d\tau + \right. \\
& \left. + \int_0^t \int_0^\ell u_x^2(\tau, x) dx d\tau \right\} + \varepsilon_0 \cdot \int_0^t \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx d\tau.
\end{aligned} \tag{2.89}$$

Пользуясь условиями (2.83), $\forall t \in [0, T]$ имеем:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^\ell \sigma(u_x(\tau, x)) u_{xx}(\tau, x) dx d\tau = \int_0^\ell \left\{ \int_0^t \sigma(u_x(\tau, x)) u_{xx}(\tau, x) d\tau \right\} dx = \\
& = \int_0^\ell \left\{ \int_{u_x(0, x)}^{u_x(t, x)} \sigma(\theta) d\theta \right\} dx = \int_0^\ell \left\{ \int_{\varphi'(x)}^{u_x(t, x)} \sigma(\theta) d\theta \right\} dx = \int_0^\ell \left\{ \int_0^{u_x(t, x)} \sigma(\theta) d\theta \right\} dx - \\
& - \int_0^\ell \int_0^{\varphi'(x)} \sigma(\theta) d\theta dx \geq - \int_0^\ell \int_0^{\varphi'(x)} \sigma(\theta) d\theta dx,
\end{aligned}$$

ибо $\forall t \in [0, T]$

$$\int_0^\ell \int_0^{u_x(t, x)} \sigma(\theta) d\theta dx \geq 0.$$

Следовательно, $\forall t \in [0, T]$:

$$- \int_0^t \int_0^\ell \sigma(u_x(\tau, x)) u_{xx}(\tau, x) dx d\tau \leq \int_0^\ell \int_0^{u_x(t, x)} \sigma(\theta) d\theta dx \leq C_1, \tag{2.90}$$

где $C_1 > 0$ - некоторая постоянная.

Далее, очевидно, что $\forall t \in [0, T]$ и $x \in [0, \ell]$:

$$u(t, x) = \varphi(x) + \int_0^t u_\tau(\tau, x) d\tau,$$

$$\int_0^t \int_0^\ell u^2(\tau, x) dx d\tau \leq 2 \int_0^\ell \varphi^2(x) dx + 2T \cdot \int_0^t \int_0^\ell u_\tau^2(\tau, x) dx d\tau; \quad (2.91)$$

$$u(t, x) = \varphi(x) + \int_0^t \int_0^x u_{\tau\xi}(\tau, \xi) d\xi d\tau,$$

$$u^2(t, x) \leq 2\varphi^2(x) + 2T \cdot \ell \cdot \int_0^t \int_0^\ell u_{\tau\xi}^2(\tau, \xi) d\xi d\tau, \quad (2.92)$$

$$\int_0^t \int_0^\ell u^2(\tau, x) dx d\tau \leq 2T \cdot \int_0^\ell \varphi^2(x) dx + 2T \cdot \ell^2 \cdot \int_0^t \int_0^\tau \int_0^\ell u_{\theta x}^2(\theta, x) dx d\theta d\tau, \quad (2.93)$$

$$u_x(t, x) = \varphi'(x) + \int_0^t u_{\tau x}(\tau, x) d\tau,$$

$$u_x^2(t, x) \leq 2(\varphi'(x))^2 + 2T \cdot \int_0^t u_{\tau x}^2(\tau, x) d\tau, \quad (2.94)$$

$$\int_0^t \int_0^\ell u_x^2(\tau, x) dx d\tau \leq 2T \cdot \int_0^\ell (\varphi'(x))^2 dx + 2T \cdot \int_0^t \int_0^\tau \int_0^\ell u_{\theta x}^2(\theta, x) dx d\theta d\tau. \quad (2.95)$$

Теперь, пользуясь оценками (2.90), (2.91), (2.93) и (2.95), из (2.89) получаем, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^\ell u_t^2(t, x) dx + (\alpha - \varepsilon_0) \cdot \int_0^t \int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau, x) dx d\tau + \int_0^t g_0(u(t, x)) dx \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^\ell \psi^2(x) dx + C_1 + C \cdot \left(\ell + 2 \int_0^\ell \varphi^2(x) dx \right) - \int_0^\ell g(x, \varphi(x)) dx + \\ & + C \cdot \ell \cdot T + 2C \cdot T \cdot \int_0^\ell \varphi^2(x) dx + 2C \cdot T \cdot \int_0^\ell (\varphi'(x))^2 dx + \\ & + C \cdot \int_0^t \left((2T + 1) \int_0^\ell u_\tau^2(\tau, x) dx + 2T(\ell^2 + 1) \int_0^\tau \int_0^\ell u_{\theta x}^2(\theta, x) dx d\theta + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^\ell g_0(u(\tau, x)) dx \Big\} d\tau \leq C_2 + C_3 \cdot \int_0^t \left\{ \int_0^\ell u_\tau^2(\tau, x) dx + \right. \\
& \left. + \int_0^\tau \int_0^\ell u_{\theta x}^2(\theta, x) dx d\theta + \int_0^\ell g_0(u(\tau, x)) dx \right\} d\tau,
\end{aligned} \tag{2.96}$$

где

$$\begin{aligned}
C_2 & \equiv C_1 + C \cdot \ell \cdot (1 + T) + 2C \cdot (1 + T) \cdot \int_0^\ell \varphi^2(x) dx + \\
& + 2CT \cdot \int_0^\ell (\varphi'(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell \psi^2(x) dx - \int_0^\ell g(x, \varphi(x)) dx, \\
C_3 & \equiv C \cdot (1 + 2T + 2T \cdot \ell^2).
\end{aligned}$$

Если принять обозначения

$$\min \left\{ \frac{1}{2}, \alpha - \varepsilon_0 \right\} = \delta_0, \quad \frac{C_2}{\delta_0} = C_4, \quad \frac{C_3}{\delta_0} = C_5,$$

то из (2.96) получим, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\ell u_t^2(t, x) dx + \int_0^t \int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau, x) dx d\tau + \int_0^\ell g_0(u(t, x)) dx \leq \\
& \leq C_4 + C_5 \cdot \int_0^t \left\{ \int_0^\ell u_\tau^2(\tau, x) dx + \int_0^\tau \int_0^\ell u_{\theta x}^2(\theta, x) dx d\theta + \int_0^\ell g_0(u(\tau, x)) dx \right\} d\tau.
\end{aligned}$$

Отсюда, применив неравенство Р.Беллмана, получаем, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\int_0^\ell u_t^2(t, x) dx + \int_0^t \int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau, x) dx d\tau + \int_0^\ell g_0(u(t, x)) dx \leq C_4 \cdot \exp\{C_5 \cdot T\} \equiv C_6.$$

Таким образом, установлены следующие априорные оценки:

$$\int_0^\ell u_t^2(t, x) dx \leq C_6 \quad \forall t \in [0, T], \tag{2.97}$$

$$\int_0^T \int_0^\ell u_{tx}^2(t, x) dx dt \leq C_6, \quad (2.98)$$

$$\int_0^\ell g_0(u(t, x)) dx \leq C_6 \quad \forall t \in [0, T].$$

В силу априорной оценки (2.98), из (2.92) и (2.94) следуют следующие априорные оценки:

$$\|u(t, x)\|_{C(x_T)} \leq R, \quad (2.99)$$

$$\int_0^\ell u_x^2(t, x) dx \leq R \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.100)$$

Далее, очевидно, что $\forall t \in [0, T]$ и $x \in [0, \ell]$:

$$u_t(t, x) = \int_0^x u_{t\xi}(t, \xi) d\xi.$$

Следовательно:

$$u_t(t, x) \Big|_{C[0, \ell]}^2 \leq \ell \cdot \int_0^\ell u_{t\xi}^2(t, x) dx \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.101)$$

Теперь, представив уравнение (2.82) в виде

$$\alpha u_{txx} = u_{tt} - \sigma'(u_x) \cdot u_{xx} - f(x, u) - F(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx}),$$

умножив обе части этого равенства на функцию $u_{xx}(t, x)$, интегрируя полученное равенство по x от 0 до ℓ , пользуясь априорной оценкой (2.99) и соответствующим неравенством (2.86), получаем, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{d}{dt} \int_0^\ell u_{xx}^2(t, x) dx &\leq \int_0^\ell u_{tt}(t, x) u_{xx}(t, x) dx - \\ &- \int_0^\ell \sigma'(u_x(t, x)) \cdot u_{xx}^2(t, x) dx - \int_0^\ell f(x, u(t, x)) \cdot u_{xx}(t, x) dx + \\ &+ C_R \cdot \ell + C_R \cdot \left\{ \int_0^\ell u_t^4(t, x) dx + \int_0^\ell u_x^4(t, x) dx + \int_0^\ell u_{tx}^2(t, x) dx + \right. \end{aligned}$$

$$+ \int_0^\ell u_{xx}^2(t, x) u_x^2(t, x) dx + \int_0^\ell u_{xx}^2(t, x) dx + \int_0^\ell u_{xx}^2(t, x) \cdot u_t^2(t, x) dx \Big\}. \quad (2.102)$$

Очевидно, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^\ell u_{\tau\tau}(\tau, x) u_{xx}(\tau, x) dx d\tau &= \int_0^\ell \left\{ \int_0^t u_{\tau\tau}(\tau, x) u_{xx}(\tau, x) d\tau \right\} dx = \\ &= \int_0^\ell u_t(t, x) u_{xx}(t, x) dx - \int_0^\ell \psi(x) \varphi''(x) dx - \\ &- \int_0^t \int_0^\ell u_\tau(\tau, x) u_{\tau xx}(\tau, x) dx d\tau = - \int_0^\ell \varphi''(x) \psi(x) dx + \\ &+ \int_0^\ell u_t(t, x) u_{xx}(t, x) dx + \int_0^t \int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau, x) dx d\tau \leq - \int_0^\ell \varphi''(x) \psi(x) dx + \\ &+ \int_0^t \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx d\tau + \frac{1}{4\varepsilon} \cdot \int_0^\ell u_t^2(t, x) dx + \varepsilon \cdot \int_0^\ell u_{xx}^2(t, x) dx, \end{aligned} \quad (2.103)$$

где $\varepsilon > 0$ - любое число. Но мы будем считать, что ε - фиксированное число, удовлетворяющее условию:

$$0 < \varepsilon < \frac{\alpha}{2}. \quad (2.104)$$

Тогда, пользуясь априорными оценками (2.97) и (2.98), из (2.103) получаем, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\int_0^t \int_0^\ell u_{\tau\tau}(\tau, x) u_{xx}(\tau, x) dx d\tau \leq C_7 + \varepsilon \cdot \int_0^\ell u_{xx}^2(t, x) dx, \quad (2.105)$$

где $C_7 > 0$ - некоторое постоянное.

С другой стороны, в силу (2.83), $\forall t \in [0, T]$:

$$- \int_0^\ell \sigma'(u_x(t, x)) u_{xx}^2(t, x) dx \leq 0. \quad (2.106)$$

А в силу априорной оценки (2.99), $\forall t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
-\int_0^{\ell} f(x, u(t, x)) u_{xx}(t, x) dx &\leq \int_0^{\ell} |f(x, u(t, x))| \cdot |u_{xx}(t, x)| dx \leq \\
&\leq C_8 \cdot \int_0^{\ell} |u_{xx}(t, x)| dx \leq C_8 \cdot \ell + C_8 \cdot \int_0^{\ell} u_{xx}^2(t, x) dx,
\end{aligned} \quad (2.107)$$

где $C_8 > 0$ - некоторое постоянное.

Далее, очевидно, что $\forall t \in [0, T]$ и $x \in [0, \ell]$:

$$u_x(t, x) = \int_{x_0}^x u_{xx}(t, \xi) d\xi, \quad (2.108)$$

где $x_0 = x_0(t) \in (0, \ell)$ такая точка, что $u_x(t, x_0) = 0$. Из (2.108) следует, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\|u_x(t, x)\|_{C[0, \ell]}^2 \leq \ell \cdot \int_0^{\ell} u_{xx}^2(t, x) dx. \quad (2.109)$$

Теперь, пользуясь неравенствами (2.101), (2.109) и априорными оценками (2.97), (2.100), $\forall t \in [0, T]$ имеем:

$$\int_0^{\ell} u_t^4(t, x) dx \leq \ell \cdot \int_0^{\ell} u_{tx}^2(t, x) dx \cdot \int_0^{\ell} u_t^2(t, x) dx \leq C_6 \cdot \ell \cdot \int_0^{\ell} u_{tx}^2(t, x) dx, \quad (2.110)$$

$$\int_0^{\ell} u_x^4(t, x) dx \leq \ell \cdot \int_0^{\ell} u_{xx}^2(t, x) dx \cdot \int_0^{\ell} u_x^2(t, x) dx \leq R \cdot \ell \cdot \int_0^{\ell} u_{xx}^2(t, x) dx, \quad (2.111)$$

$$\int_0^{\ell} u_{xx}^2(t, x) u_x^2(t, x) dx \leq \ell \cdot \int_0^{\ell} u_{xx}^2(t, x) dx \cdot \int_0^{\ell} u_{xx}^2(t, x) dx, \quad (2.112)$$

$$\int_0^{\ell} u_{xx}^4(t, x) u_t^2(t, x) dx \leq \ell \cdot \int_0^{\ell} u_{xx}^2(t, x) dx \cdot \int_0^{\ell} u_{xx}^2(t, x) dx. \quad (2.113)$$

Интегрируя обе части неравенства (2.102) по t от 0 до t , пользуясь оценками (2.105)-(2.107), (2.110)-(2.113) и априорной оценкой (2.98), получаем, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha}{2} - \varepsilon\right) \cdot \int_0^{\ell} u_{xx}^2(t, x) dx &\leq \frac{\alpha}{2} \int_0^{\ell} (\varphi''(x))^2 dx + C_7 + C_8 \cdot \ell \cdot T + \\ &+ C_R \cdot \ell \cdot T + C_R \cdot C_6 \cdot \ell \cdot C_6 + C_R \cdot C_6 + \\ &+ \int_0^t \left\{ (C_8 + C_R \cdot R \cdot \ell + C_R) + 2C_0 \cdot \ell \cdot \int_0^{\ell} u_{\tau x}^2(\tau, x) dx \right\} \cdot \int_0^{\ell} u_{xx}^2(t, x) dx d\tau. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Из (2.114), пользуясь условием (2.104), получаем, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\int_0^{\ell} u_{xx}^2(t, x) dx \leq C_9 + C_9 \cdot \int_0^t \left\{ 1 + \int_0^{\ell} u_{\tau x}^2(\tau, x) dx \right\} \cdot \int_0^{\ell} u_{xx}^2(t, x) dx d\tau,$$

где $C_9 > 0$ - некоторое постоянное. Из последнего неравенства, применив неравенство Р.Беллмана, и пользуясь априорной оценкой (2.98), получаем, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\int_0^{\ell} u_{xx}^2(t, x) dx \leq C_9 \cdot \exp\{C_9 \cdot (T + C_6)\} \equiv C_{10},$$

т.е. справедлива априорная оценка:

$$\int_0^{\ell} u_{xx}^2(t, x) dx \leq C_{10} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.115)$$

Из (2.109), в силу априорной оценки (2.115), следует справедливость априорной оценки:

$$\|u_x(t, x)\|_{C(\mathcal{G}_T)} \leq R. \quad (2.116)$$

Кроме того, в силу априорной оценки (2.115), из (2.113) имеем:

$$\int_0^{\ell} u_{xx}^2(t, x) u_x^2(t, x) dx \leq C_{10} \cdot \ell \cdot \int_0^{\ell} u_x^2(t, x) dx \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.117)$$

Далее, аналогично (2.58), $\forall t \in [0, T]$ имеем:

$$\|u\|_{B_{2,2,T}^{2,1}}^2 \leq 2\|Z\|_{B_{2,2,T}^{2,1}}^2 + \frac{4\ell}{\alpha\pi^2} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right),$$

$$\begin{aligned} & \cdot \int_0^t \int_0^\ell \{ \sigma'(u_\xi(\tau, \xi)) u_{\xi\xi}(\tau, \xi) + f(\xi, u(\tau, \xi)) + \\ & + F(\tau, \xi, u(\tau, \xi), u_\tau(\tau, \xi), u_\xi(\tau, \xi), u_{\tau\xi}(\tau, \xi), u_{\xi\xi}(\tau, \xi)) \}^2 d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Из (2.118), пользуясь априорными оценками (2.116), (2.115), (2.99), неравенством (2.87), а также априорной оценкой (2.98), получаем, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \|u\|_{B_{2,2,T}^{2,1}}^2 & \leq R_1 + R_2 \cdot \int_0^t \left\{ \int_0^\ell u_\tau^6(\tau, x) dx + \int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau, x) u_\tau^2(\tau, x) dx + \right. \\ & \left. + \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) u_\tau^4(\tau, x) dx \right\} d\tau, \end{aligned} \quad (2.119)$$

где $R_1 > 0$ и $R_2 > 0$ - некоторые постоянные.

Теперь, пользуясь оценками (2.110), (2.117) и структурой пространства $B_{2,2,\tau}^{2,1}$, $\forall \tau \in [0, T]$ имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^\ell u_\tau^6(\tau, x) dx & \leq \frac{\pi^2}{6} \cdot \|u\|_{B_{2,2,\tau}^{2,1}}^2 \cdot \int_0^\ell u_\tau^4(\tau, x) dx \leq \\ & \leq \frac{\pi^2}{6} \cdot C_6 \cdot \ell \cdot \int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau, x) dx \cdot \|u\|_{B_{2,2,\tau}^{2,1}}^2, \end{aligned} \quad (2.120)$$

$$\int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau, x) u_\tau^2(\tau, x) dx \leq \frac{\pi^2}{6} \cdot \|u\|_{B_{2,2,\tau}^{2,1}}^2 \cdot \int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau, x) dx, \quad (2.121)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) u_\tau^4(\tau, x) dx & \leq \frac{\pi^2}{6} \cdot \|u\|_{B_{2,2,\tau}^{2,1}}^2 \cdot \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) u_\tau^2(\tau, x) dx \leq \\ & \leq \frac{\pi^2}{6} \cdot C_{10} \cdot \ell \cdot \int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau, x) dx \cdot \|u\|_{B_{2,2,\tau}^{2,1}}^2. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Пользуясь оценками (2.120)-(2.122), из (2.119) получаем, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\|u\|_{B_{2,2,T}^{2,1}}^2 \leq R_1 + R_3 \cdot \int_0^t \left\{ \int_0^\ell u_{\tau x}^6(\tau, x) dx \right\} \|u\|_{B_{2,2,T}^{2,1}}^2 d\tau. \quad (2.123)$$

Из (2.123), применив неравенство Р.Беллмана и пользуясь априорной оценкой (2.98), получаем:

$$\|u\|_{B_{2,2,T}^{2,1}}^2 \leq R_1 \cdot \exp\{R_3 \cdot C_6\} \equiv R_4, \quad (2.124)$$

т.е. всевозможные решения почти всюду $u(t, x)$ задачи (2.82), (2.2), (2.3), принадлежащие пространству $B_{2,2,T}^{3,2}$, априори ограничены в $B_{2,2,T}^{2,1}$. Дальнейшая часть доказательства данной теоремы совпадает с той частью доказательства теоремы 2.4, которая изложена непосредственно после установления априорной оценки (2.62). Теорема доказана.

Замечание 2.4. Для выполнения условия 4_6 теоремы 2.6 достаточно выполнение условия:

$$(*) \cdot \begin{cases} \forall R > 0 \text{ в области } \mathcal{D}_T \times [-R, R] \times (-\infty, \infty)^4 \\ |F(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx})| \leq C_R \cdot \{1 + |u_t|^3 + u_x^2 + \\ + |u_{tx}| + |u_{tx}| \cdot |u_t| + |u_{tx}| \cdot |u_x| + |u_{xx}| + |u_{xx}| \cdot u_t^2\}, \end{cases} \quad (2.125)$$

где $C_R > 0$ - некоторое постоянное. Очевидно, что из выполнения последнего условия вытекает и условие 4_2 теоремы 2.6. Таким образом, для выполнения условий 4_6 и 4_2 теоремы 2.6 достаточно выполнение условия (*).

Теорема 2.7. Пусть

1. Выполнено условие 1 теоремы 2.3.
2. а) Функция $\sigma(y)$ трижды непрерывно дифференцируема на $(-\infty, \infty)$;
- б) выполнено условие 2_6 теоремы 2.6.
3. а) Функция $f(x, u)$ дважды непрерывно дифференцируема по совокупности своих переменных в замкнутой области $[0, \ell] \times (-\infty, \infty)$;

б) выполнены условия 3_6 и 3_8 теоремы 2.6.

4. а) Выполнено условие 2 теоремы 2.3;

б) выполнены условия 4_6 - 4_8 теоремы 2.6.

Тогда задача (2.82), (2.2), (2.3) имеет единственное классическое решение.

Доказательство. Как мы уже знаем, для доказательства данной теоремы достаточно показать, что всевозможные классические решения $u(t, x)$ задачи (2.82), (2.2), (2.3), принадлежащие пространству $B_{2,2,T}^{4,3}$, в нём априори ограничены. Так как каждое классическое решение $u(t, x)$ задачи (2.82), (2.2), (2.3) является и её решением почти всюду, то априорная оценка (2.124) справедлива и для классических решений $u(t, x)$ задачи (2.82), (2.2), (2.3). Дальнейшая часть доказательства данной теоремы представляет собою повторение соответствующей части доказательства теоремы 2.5. Теорема доказана.

Замечание 2.5. Как видно из (2.83)-(2.87), при условиях теорем 2.6 и 2.7 правая часть уравнения (2.82) может иметь:

- а) по переменным u (при $|u| \rightarrow \infty$) и u_x (при $|u_x| \rightarrow \infty$) сколь угодно большой (например, экспоненциальный и ещё больший) рост;
- б) по переменной u_t (при $|u_t| \rightarrow \infty$) кубический рост;
- в) а по переменным u_{tx} и u_{xx} (при $|u_{tx}| + |u_{xx}| \rightarrow \infty$) лишь линейный рост.

Замечание 2.6. Очевидно, что неравенство (2.85) выполняется и тогда, когда если в его правой части слагаемое $\varepsilon_0 \cdot u_{tx}^2$ заменить слагаемым $C_0 \cdot |u_{tx}|^{2-\delta}$, где δ ($0 < \delta \leq 2$) и $C_0 > 0$ - любые постоянные (т.е. необязательно $C_0 < \alpha$).

Теорема 2.8. Пусть

1. Правая часть уравнения (2.82) не зависит от переменной u_{xx} , точнее $\sigma(y) \equiv 0$ и $F(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx})$; выполнены все условия теоремы 2.3, условие 3 теоремы 2.7 и условие 4_6 теоремы 2.6.
2. $\forall R > 0$ в области $\mathcal{D}_T \times [-R, R] \times (-\infty, \infty)^3$:

$$F_x(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}) \cdot u_{tx} + F_u(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}) \cdot u_x \cdot u_{tx} \leq \\ \leq C_R \cdot \{1 + u_t^6 + u_t^2 \cdot u_x^4 + u_x^4 + u_x^2 \cdot u_t^2 + u_{tx}^2 \cdot u_x^2 + u_{tx}^2\}, \quad (2.126)$$

$$F_{u_t}(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}) \leq C_R \cdot \{1 + u_t^2 + u_x^2\}, \quad (2.127)$$

$$|F_{u_x}(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx})| \leq C_R \cdot \{1 + |u_t| + |u_x|\}, \quad (2.128)$$

$$|F_{u_{tx}}(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx})| \leq C_R \cdot \{1 + |u_t| + |u_x|\}, \quad (2.129)$$

где $C_R > 0$ - постоянное, зависящее лишь от R .

3. $\forall R > 0$ в области $\mathcal{D}_T \times [-R, R]^3 \times (-\infty, \infty)$:

$$|F_x(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx})| \leq C_R \cdot \{1 + |u_{tx}|^3\}, \quad (2.130)$$

$$|F_u(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx})| \leq C_R \cdot \{1 + |u_{tx}|^3\}, \quad (2.131)$$

$$|F_{u_t}(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx})| \leq C_R \cdot \{1 + u_{tx}^2\}, \quad (2.132)$$

где $C_R > 0$ - постоянное.

Тогда задача (2.82), (2.2), (2.3) имеет единственное классическое решение.

Доказательство. Как мы знаем, для доказательства данной теоремы достаточно показать, что всевозможные классические решения $u(t, x)$ задачи (2.82), (2.2), (2.3), принадлежащие пространству $B_{2,2,T}^{4,3}$, в нём априори ограничены. При условиях данной теоремы, как видно из процесса доказательства теоремы 2.6, для функций $u(t, x)$ справедливы априорные оценки (2.97) и (2.98).

Теперь дифференцировав равенство (2.82) по x один раз, умножив обе части полученного равенства на функцию $u_{tx}(t, x)$ и проинтегрировав последнее равенство по x от 0 до ℓ , причём произведя интегрирование по частям один раз во втором слагаемом левой части, с учётом того, что $\forall t \in [0, T] \quad u_{tx}(t, 0) = u_{tx}(t, \ell) = 0$, получаем, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \int_0^\ell u_{tx}^2(t, x) dx + \alpha \cdot \int_0^\ell u_{xx}^2(t, x) dx = \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial x} f(x, u(t, x)) \cdot u_{tx}(t, x) dx +$$

$$+ \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}(u(t, x)) \cdot u_t(t, x) dx, \quad (2.139)$$

где

$$\mathcal{F}(u(t, x)) \equiv F(t, x, u(t, x), u_t(t, x), u_x(t, x), u_{tx}(t, x)). \quad (2.140)$$

Интегрируя равенство (2.139) по t от 0 до t , получаем, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\frac{1}{2} \int_0^\ell u_{tx}^2(t, x) dx + \alpha \int_0^t \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx d\tau = \frac{1}{2} \int_0^\ell (\psi'(x))^2 dx + \\ + \int_0^t \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial x} \{f(x, u(\tau, x))\} \cdot u_{tx}(\tau, x) dx d\tau + \int_0^t \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial x} \{\mathcal{F}(u(\tau, x))\} \cdot u_{tx}(\tau, x) dx d\tau. \quad (2.141)$$

Очевидно, что $\forall t \in [0, T]$ и $x \in [0, \ell]$:

$$u_{xx}(t, x) = \varphi''(x) + \int_0^t u_{xx}(\tau, x) d\tau, \\ \int_0^\ell u_{xx}^2(t, x) dx \leq 2 \int_0^\ell (\varphi''(x))^2 dx + 2 \int_0^t \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx d\tau \quad (2.142)$$

и, следовательно, в силу (2.109), $\forall t \in [0, T]$:

$$u_x(t, x)_{C[0, \ell]}^2 \leq 2\ell \cdot \int_0^\ell (\varphi''(x))^2 dx + 2\ell \cdot \int_0^t \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx d\tau. \quad (2.143)$$

Теперь, пользуясь априорными оценками (2.97) и (2.100), а также оценками (2.101), (2.142) и (2.143), получаем, что $\forall \tau \in [0, T]$:

$$\int_0^\ell u_{xx}(\tau, x) dx \leq \ell + \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx, \quad (2.144)$$

$$\int_0^\ell |u_x(\tau, x)| \cdot |u_{xx}(\tau, x)| dx \leq \frac{1}{2} \int_0^\ell u_x^2(\tau, x) dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx \leq$$

$$\leq C \cdot \left\{ 1 + \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx \right\}, \quad (2.145)$$

$$\int_0^\ell u_\tau^6(\tau, x) dx \leq \left\{ \ell \cdot \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx \right\}^2 \cdot \int_0^\ell u_\tau^2(\tau, x) dx \leq$$

$$\leq C \cdot \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx \cdot \int_0^\ell u_\tau^2(\tau, x) dx, \quad (2.146)$$

$$\int_0^\ell u_\tau^2(\tau, x) u_x^4(\tau, x) dx \leq \ell \cdot \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx \cdot \|u_x(\tau, x)\|_{C[0, \ell]}^2.$$

$$\cdot \int_0^\ell u_x^2(\tau, x) dx \leq \ell \cdot \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx \cdot$$

$$\cdot \left\{ 2\ell \cdot \int_0^\ell (\varphi''(x))^2 dx + 2\ell \cdot \int_0^\ell \int_0^{\tau_\ell} u_{\theta xx}^2(\theta, x) dx d\theta \right\}.$$

$$\cdot \int_0^\ell u_x^2(\tau, x) dx \leq C \cdot \left\{ \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx \cdot \int_0^{\tau_\ell} \int_0^\ell u_{\theta xx}^2(\theta, x) dx d\theta \right\}, \quad (2.147)$$

$$\int_0^\ell u_x^4(\tau, x) dx \leq \left\{ 2\ell \cdot \int_0^\ell (\varphi''(x))^2 dx + 2\ell \cdot \int_0^\ell \int_0^{\tau_\ell} u_{\theta xx}^2(\theta, x) dx d\theta \right\} \cdot$$

$$\cdot \int_0^\ell u_x^2(\tau, x) dx \leq C \left\{ 1 + \int_0^{\tau_\ell} \int_0^\ell u_{\theta xx}^2(\theta, x) dx d\theta \right\}, \quad (2.148)$$

$$\int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) u_\tau^2(\tau, x) dx \leq \ell \cdot \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx \cdot \int_0^\ell u_\tau^2(\tau, x) dx \leq$$

$$\leq C \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx \cdot \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx, \quad (2.149)$$

$$\int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) u_x^2(\tau, x) dx \leq \left\{ 2\ell \cdot \int_0^\ell (\varphi''(x))^2 dx + 2\ell \cdot \int_0^\ell \int_0^{\tau_\ell} u_{\theta xx}^2(\theta, x) dx d\theta \right\} \cdot \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx \leq$$

$$\leq C \cdot \left\{ \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx + \int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau, x) dx \cdot \int_0^{\tau_\ell} \int_0^\ell u_{\theta xx}^2(\theta, x) dx d\theta \right\}, \quad (2.150)$$

$$\int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx \leq C \cdot \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx, \quad (2.151)$$

$$\int_0^\ell |u_{xx}(\tau, x)| \cdot |u_{\tau x}(\tau, x)| dx \leq \frac{1}{2} \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau, x) dx \leq$$

$$\leq \int_0^\ell (\varphi''(x))^2 dx + \int_0^{\tau_\ell} \int_0^\ell u_{\theta xx}^2(\theta, x) dx d\theta + \frac{1}{2} \int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau, x) dx \leq$$

$$\leq C \cdot \left\{ 1 + \int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau, x) dx + \int_0^{\tau_\ell} \int_0^\ell u_{\theta xx}^2(\theta, x) dx d\theta \right\}, \quad (2.152)$$

$$\int_0^\ell |u_\tau(\tau, x)| \cdot |u_{xx}(\tau, x)| \cdot |u_{xx}(\tau, x)| dx \leq \frac{1}{2} \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) u_\tau^2(\tau, x) dx \leq \int_0^\ell (\varphi''(x))^2 dx + \int_0^{\tau_\ell} \int_0^\ell u_{\theta xx}^2(\theta, x) dx d\theta +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} C \int_0^\ell u_{\alpha}^2(\tau, x) dx \cdot \int_0^\ell u_{\alpha}^2(\tau, x) dx \leq C \cdot \left\{ 1 + \int_0^\ell u_{\alpha}^2(\tau, x) dx \cdot \right. \\
& \cdot \int_0^\ell u_{\alpha}^2(\tau, x) dx + \int_0^\tau \int_0^\ell u_{\alpha x}^2(\theta, x) dx d\theta \left. \right\}, \quad (2.153)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\ell |u_x(\tau, x)| \cdot |u_{xx}(\tau, x)| \cdot |u_{\tau x}(\tau, x)| dx \leq \frac{1}{2} \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau, x) u_x^2(\tau, x) dx \leq C \cdot \left\{ 1 + \int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau, x) dx + \right. \\
& + \int_0^\tau \int_0^\ell u_{\theta xx}^2(\theta, x) dx d\theta + \int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau, x) dx \cdot \int_0^\tau \int_0^\ell u_{\theta xx}^2(\theta, x) dx d\theta \left. \right\}, \quad (2.154)
\end{aligned}$$

$$\int_0^\ell |u_{\tau xx}(\tau, x)| \cdot |u_{\tau x}(\tau, x)| dx \leq \frac{1}{4\varepsilon} \cdot \int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau, x) dx + \varepsilon \cdot \int_0^\ell u_{\tau xx}^2(\tau, x) dx, \quad (2.155)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\ell |u_{\tau}(\tau, x)| \cdot |u_{xx}(\tau, x)| \cdot |u_{\alpha}(\tau, x)| dx \leq \varepsilon \cdot \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx + \\
& + \frac{1}{4\varepsilon} \cdot \int_0^\ell u_{\alpha}^2(\tau, x) u_{\tau}^2(\tau, x) dx \leq \varepsilon \cdot \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx + \frac{1}{\varepsilon} \cdot C \cdot \\
& \cdot \int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau, x) dx \cdot \int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau, x) dx, \quad (2.156)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\ell |u_x(\tau, x)| \cdot |u_{\tau xx}(\tau, x)| \cdot |u_{\tau x}(\tau, x)| dx \leq \varepsilon \cdot \int_0^\ell u_{\tau xx}^2(\tau, x) dx + \\
& + \frac{1}{4\varepsilon} \cdot \int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau, x) u_x^2(\tau, x) dx \leq \varepsilon \cdot \int_0^\ell u_{\tau xx}^2(\tau, x) dx + \\
& + \frac{1}{\varepsilon} C \cdot \left\{ \int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau, x) dx + \int_0^\ell u_{\alpha}^2(\tau, x) dx \cdot \int_0^\tau \int_0^\ell u_{\theta xx}^2(\theta, x) dx d\theta \right\}, \quad (2.157)
\end{aligned}$$

где $C > 0$ - некоторое постоянное, не зависящее от u и t , а $\varepsilon > 0$ - достаточно малое число, выбираемое ниже подходящим образом.

Теперь, из (2.141), пользуясь развёрнутыми выражениями

$$\frac{\partial}{\partial x}\{f(x, u(t, x))\} \text{ и } \frac{\partial}{\partial x}\{\mathcal{F}(x, u(t, x))\}, \text{ имея в виду обозначение}$$

(2.140), пользуясь априорной оценкой (2.99), соответствующими неравенствами (2.126)-(2.129) и оценками (2.144)-(2.157), получаем, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^\ell u_{tx}^2(t, x) dx + \alpha \int_0^t \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx d\tau \leq C_1 + C_2 \cdot \varepsilon \cdot \\ & \cdot \int_0^t \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx d\tau + \int_0^t \left\{ \left[C_3 + C_4 \cdot \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx + C_5 \cdot \frac{1}{\varepsilon} + \right. \right. \\ & \left. \left. + C_6 \cdot \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx \right] \cdot \int_0^\ell u_{tx}^2(\tau, x) dx + \left[C_7 + C_8 \cdot \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx + \right. \right. \\ & \left. \left. + C_9 \cdot \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx \right] \cdot \int_0^\tau \int_0^\ell u_{\theta xx}^2(\theta, x) dx d\theta \right\} d\tau, \quad (2.158) \end{aligned}$$

где $C_i > 0$ ($i = \overline{1, 9}$) - некоторые постоянные, не зависящие от u , t и ε .

Теперь, если число ε , фигурирующее в неравенстве (2.158), фиксировать так, чтобы было $C_2 \cdot \varepsilon < \alpha$, затем перенести второе слагаемое правой части неравенства (2.158) в его левую часть и разделить обе части последнего полученного неравенства на

$\min \left\{ \frac{1}{2}, \alpha - C_2 \cdot \varepsilon \right\}$, то получим, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\int_0^\ell u_{tx}^2(t, x) dx + \int_0^t \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx d\tau \leq C_{10} + C_{10} \cdot \int_0^t \left\{ 1 + \int_0^\ell u_{tx}^2(\tau, x) dx \right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \int_0^\ell u_{\tau x}^2(\tau, x) dx + \int_0^\tau \int_0^\ell u_{\theta xx}^2(\theta, x) dx d\theta \right\} d\tau, \quad (1.159)$$

где $C_{10} > 0$ - некоторая постоянная, не зависящая от u и t .

Из (2.159), применив неравенство Р.Беллмана и пользуясь априорной оценкой (2.98), получаем, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \int_0^\ell u_x^2(t, x) dx + \int_0^t \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx d\tau &\leq \\ &\leq C_{10} \cdot \exp \left\{ C_{10} \cdot \left[T + \int_0^T \int_0^\ell u_{xx}^2(\tau, x) dx d\tau \right] \right\} \leq C_{11}. \end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость априорных оценок:

$$\int_0^\ell u_x^2(t, x) dx \leq C_{11} \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.160)$$

$$\int_0^T \int_0^\ell u_{xx}^2(t, x) dx dt \leq C_{11}. \quad (2.161)$$

Из (2.101), в силу априорной оценки (2.160), следует априорная оценка

$$\|u_t(t, x)\|_{C(\mathcal{G}_T)} \leq C_{12}, \quad (1.162)$$

а из (2.142) и (2.143), в силу априорной оценки (2.161), следуют априорные оценки:

$$\int_0^\ell u_{xx}^2(t, x) dx \leq C_{12} \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.163)$$

$$\|u_x(t, x)\|_{C(\mathcal{G}_T)} \leq C_{12}. \quad (2.164)$$

Таким образом, как видно из (2.99), (2.162) и (2.164), для функций $u(t, x)$ установлена априорная оценка:

$$\|u(t, x)\|_{C^{(1)}(\mathcal{G}_T)} \leq R. \quad (2.165)$$

Далее, аналогично (2.65), $\forall t \in [0, T]$ имеем:

$$\|u\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 \leq 2\|Z\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 + \frac{4\ell^3}{\alpha\pi^4} \left(\frac{2\ell^2}{\alpha\pi^2} \cdot T + 1 \right).$$

$$\cdot \int_0^t \int_0^\ell \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} [f(\xi, u(\tau, \xi))] + \frac{\partial}{\partial \xi} [\mathcal{F}(u(\tau, \xi))] \right\}^2 d\xi d\tau. \quad (2.166)$$

Очевидно, что $\forall t \in [0, T]$ и $x \in [0, \ell]$:

$$u_{tx}(t, x) = \int_{x_0(t)}^x u_{t\xi\xi}(t, \xi) d\xi, \quad (2.167)$$

где $x_0(t) \in (0, \ell)$ такая точка, что $u_{tx}(t, x_0) = 0$.

Из (2.167) получаем, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\|u_{tx}(t, x)\|_{C[0,\ell]}^2 \leq \ell \cdot \int_0^\ell u_{xx}^2(t, x) dx. \quad (2.168)$$

Теперь, пользуясь структурой пространства $B_{2,2,T}^{3,2}$, неравенством (2.168) и априорной оценкой (2.160), $\forall t \in [0, T]$ имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^\ell u_{tx}^6(t, x) dx &\leq \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{6} \|u\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 \cdot \|u_{tx}(t, x)\|_{C[0,\ell]}^2 \cdot \int_0^\ell u_{tx}^2(t, x) dx \leq \\ &\leq \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{6} \cdot C_{11} \cdot \ell \cdot \int_0^\ell u_{xx}^2(t, x) dx \cdot \|u\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2. \end{aligned} \quad (2.169)$$

Из (2.169), пользуясь развёрнутыми выражениями $\frac{\partial}{\partial x} \{f(x, u(t, x))\}$ и $\frac{\partial}{\partial x} \{\mathcal{F}(u(t, x))\}$, имея в виду обозначение (2.140), пользуясь априорной оценкой (2.165), соответствующими неравенствами (2.130)-(2.132), оценкой (2.169), в области $\mathcal{G}_T \times [-R, R]^3 \times (-\infty, \infty)$ неравенствами

$$F_{u_t}(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}) \leq C_R \cdot (1 + 2R),$$

$$F_{u_{tx}}(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}) \leq C_R \cdot (1 + 2R)$$

(вытекающими из (2.128) и (2.129)), а также априорными оценками (2.160), (2.161) и (2.163), получаем, что $\forall t \in [0, T]$:

$$\|u\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 \leq R_1 + R_2 \cdot \int_0^t \left\{ \int_0^t u_{xx}^2(\tau, x) dx \right\} \cdot \|u\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 d\tau, \quad (2.170)$$

где $R_1 > 0$ и $R_2 > 0$ - некоторые постоянные, не зависящие от u и t . Из (2.170), применив неравенство Р.Беллмана и пользуясь априорной оценкой (2.161), получаем:

$$\|u\|_{B_{2,2,T}^{3,2}}^2 \leq R_1 \cdot \exp\{R_2 \cdot C_{11}\} \equiv R_3. \quad (2.171)$$

Таким образом, показали, что всевозможные классические решения $u(t, x)$ задачи (2.82), (2.2), (2.3), принадлежащие пространству $B_{2,2,T}^{4,3}$, априори ограничены в $B_{2,2,T}^{3,2}$. Дальнейшая часть доказательства данной теоремы, т.е. установление априорной ограниченности функций $u(t, x)$ и в $B_{2,2,T}^{4,3}$, представляет собой повторение соответствующей части доказательства теоремы 2.5. Теорема доказана.

Замечание 2.7. Отметим, что для выполнения неравенства (2.126) достаточно, например, чтобы $\forall R > 0$ в области $\mathcal{Q}_T \times [-R, R] \times (-\infty, \infty)^3$ выполнялись условия:

$$\begin{aligned} |F_x(t, x, u, u_t, u_x, u_{xx})| &\leq C_R \cdot \{1 + u_t^4 + |u_t| \cdot |u_x|^3 + |u_x|^3 + \\ &\quad + |u_{xx}| + |u_{xx}| \cdot u_t^2 + |u_{xx}| \cdot u_x^2\}, \\ |F_u(t, x, u, u_t, u_x, u_{xx})| &\leq C_R \cdot \{1 + |u_t|^3 + |u_t| \cdot u_x^2 + u_x^2 + \\ &\quad + |u_{xx}| + |u_{xx}| \cdot |u_t| + |u_{xx}| \cdot |u_x|\}, \end{aligned}$$

ибо

$$\begin{aligned} |u_{xx}| &\leq 1 + u_{xx}^2, \\ u_t^4 \cdot |u_{xx}| &\leq \frac{1}{2} \{u_t^6 + u_t^2 \cdot u_{xx}^2\}, \\ |u_t| \cdot |u_x|^3 \cdot |u_{xx}| &\leq \frac{1}{2} \{u_t^2 \cdot u_x^4 + u_x^2 \cdot u_{xx}^2\}, \\ |u_x|^3 \cdot |u_{xx}| &\leq \frac{1}{2} \{u_x^4 + u_x^2 \cdot u_{xx}^2\}, \end{aligned}$$

$$|u_x| \cdot |u_{xx}| \leq 1 + u_x^2 \cdot u_{xx}^2,$$

$$|u_t|^3 \cdot |u_x| \cdot |u_{xx}| \leq \frac{1}{2} \{u_t^6 + u_x^2 \cdot u_{xx}^2\},$$

$$|u_{xx}| \cdot |u_x| \cdot |u_{xx}| \leq \frac{1}{2} \{u_{xx}^2 \cdot u_x^2 + u_{xx}^2\},$$

$$|u_{xx}| \cdot |u_t| \cdot |u_x| \cdot |u_{xx}| \leq \frac{1}{2} \{u_{xx}^2 \cdot u_t^2 + u_x^2 \cdot u_{xx}^2\}.$$

Замечание 2.8. Как видно из неравенств (2.84), (2.85) и (2.127)-(2.129), при условиях последней теоремы 2.8, правая часть уравнения (2.82) может иметь: по u (при $u \rightarrow \infty$) и u_t (при $|u_t| \rightarrow \infty$) сколь угодно большой рост, по u_x (при $|u_x| \rightarrow \infty$) квадратичный рост, а по u_{xx} (при $|u_{xx}| \rightarrow \infty$) лишь линейный (первый) порядок роста.

Литература

1. Худавердиев К.И. К теории многомерных смешанных задач для нелинейных гиперболических уравнений. Дис... докт. физ.-мат.наук – Баку, 1973, 319 с.
2. Nagumo J., Arimoto S. and Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon // Proceeding of the JRE, 50 (10), 1962, pp.2061-2070.
3. Reiko Arima and Yojiro Hasegawa. On global solutions for mixed problem of a semilinear differential equation // Proc. Japan Acad., 39, №10, 1963, pp.721-725.
4. Jamaguti Masaja. The asymptotic behaviour of the solution of a semilinear partial differential equation related to an active pulse transmission line // Proc. Japan Acad., 39, №10, 1963, pp.726-730.
5. Расулова Г.А. Исследование смешанной задачи для одного класса квазилинейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Дифференциальные уравнения, 1967, 3, №9, с.1578-1591.
6. Greenberg J.M., Mac Camy R.C. and Mizel V.J. On the existence, uniqueness and stability of solutions of the equation $\sigma'(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xtx} = \rho_0 u_{tt}$ // J.Math.Mech., 1968, 17, pp.707-728.
7. Greenberg J.M. On the existence, uniqueness, and stability of solutions of the equation $\rho_0 u_{tt} = E(u_x) \cdot u_{xx} + \lambda u_{xtx}$ // J. of Math. Anal. and Appl., 1969, 25, pp.575-591.
8. Greenberg J.M., Mac Camy R.C. On the exponential stability of solutions of $E(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xtx} = \rho u_{tt}$ // J.Math.Anal. and Appl., 1970, 31, №2, pp.406-417.
9. Mac Camy R.C. Existence, uniqueness and stability of solutions of the equation $u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}(\sigma(u_x) + \lambda(u_x)u_{tt})$ // Indiana Univ. Math. J., 1970, 20, №3, pp.231-238.
10. Крицкая С.С. Математическое рассмотрение задачи о продольном колебании упруго-вязкого неоднородного стержня // «Известия Высших Учебных Заведений. Математика», 1971, №4 (107), с.37-41.
11. Davis P.L. On the existence, uniqueness and stability of solutions of a nonlinear functional differential equation // J.Math.Anal. and Appl., 1971, 34, №1, pp.128-140.
12. Кулиева Б.А. Исследование предельной краевой задачи на полуоси для одного класса квазилинейных уравнений третьего порядка и задачи на сопряжение двух уравнений (одного квазилинейного гиперболического уравнения второго порядка и некоторого квазилинейного уравнения третьего порядка). Дис... канд.физ.-мат. наук – Баку, 1972, 129 с.

Рубинов Л.Я. Некоторые особенности одномерного ламинарного течения вязкой сжимаемой жидкости в трубе // «Известия Высших Учебных Заведений. Математика», 1974, №1, с.96-102.

Sowunti C.O.A. On the existence and uniqueness of periodic solution of the equation $\rho u_{tt} - \mu u_{xx} - K^* u_{xx} - \lambda u_{xtx} - f = 0$ // "Boll. Unione mat.ital.", 1974, 10, №3, pp.724-729.

Nishihara K. A remark on a paper of J.M.Greenberg, R.C. Mac Camy and V.J.Mizel // TRU Math., 1974, 10, pp. 37-40.

Davis P.L. A quasilinear hyperbolic and related third-order equations // J.Math.Anal. and Appl., 1975, 51, №3, pp.596-606.

Mitsuhiro Nakao, Tokumori Nanby. Existence of global (bounded) solutions for some nonlinear evolution equation of second order // «Кюсю дайгаку кеебу сугаку дзасси, Math. Repts. Coll.Gen.Educ.Kyushu Univ.», 1975, 10, №1, pp.67-75.

Clements J.C. On the existence and uniqueness of solutions of the equation

$$u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_i(u_{x_i})) - \Delta_N u_t = f \quad // \quad \text{Canad. Math.Bull., 1975, 18 (2),}$$

pp.181-187.

Филимонов А.М. Периодические решения некоторых нелинейных уравнений с частными производными // Дифференциальные уравнения, 1976, 12, №11, с. 2076-2084.

Raupp M.A., Rezende N.S. De computation of longitudinal motions of a viscoelastic bar // Bol.Soc. Brasil. Math., 1977, 8, №2, pp. 131-147.

Кожанов А.И. Смешанная задача для одного класса уравнений неклассического типа // Дифференциальные уравнения, 1979, 15, №2, с.272-280.

Arya J.C., Lardner R.W. Plane shock waves viscoelastic media displaying cubic elasticity // Util. Math., 1979, 16, pp.223-248.

Ebihara Yukiyoishi. On some nonlinear evolution equations with the strong dissipation.I. // J.Different. Equat., 1978, 30, №2, pp.149-164.

Ebihara Yukiyoishi. On some nonlinear evolution equations with the strong dissipation.II. // J.Different. Equat., 1979, 34, №3, pp.339-352.

Andrews G. On the existence of solutions to the equation $u_{tt} = u_{xxt} + (\sigma(u_x))_x$ // J.Different Equat., 1980, 35, №2, pp.200-231.

Webb G.F. Existence and asymptotic behavior for a strongly damped nonlinear wave equation // Can.J.Math., 1980, 32, №3, pp.631-643.

Longman J.M. Wave propagation in a viscoelastic solid // "J. comput. Phys.", 1980, 37, №2, pp.171-182.

Пятков С.Г. Об одном нелинейном уравнении третьего порядка // «Дифференциальные уравнения с частными производными. Труды конференции по дифференциальным уравнениям и вычислительной математике, Новосибирск, 1978», Новосибирск, 1980, с. 94-96.

29. Nakao Mitsuhiro. On global classical solutions of a quasi-linear wave equation with a viscoelastic term // «Кюсю дайраку кёёбу сугаку дзасси. Math. Repts. Coll.Gen.Educ.Kyushu Univ.», 1981, 13, №1, pp.1-29.
30. Белов Ю.Я., Яненко Н.Н. Об одной регуляризации уравнений Бюргерса // Доклады АН СССР, 1979, т.246, №3, с.521-524.
31. Кажихов А.В., Николаев В.Б. О корректности краевых задач для уравнений вязкого газа с немонотонной функцией стояния // Численные методы механики сплошной среды, 1979, т.10, №2, с. 77-84.
32. Ebihara Y. Some evolution equations with the quasi-linear strong dissipation // J.Math.pures.et.appl., 1979, 58, №2, pp.229-245.
33. Кожанов А.И. Смешанная краевая задача для некоторых классов нелинейных уравнений третьего порядка // Математический сборник, 1982, 118, №4, с. 504-522.
34. Ларькин Н.А. Теоремы существования для квазилинейных псевдогиперболических уравнений // Доклады АН СССР, 1982, 265, №6, с. 1316-1319.
35. Ebihara Yukiyoishi. On some nonlinear evolution equations with the strong dissipation.III. // J.Different. Equat., 1982, 45, №3, pp.332-355.
36. Артюшин А.Н. О разрешимости смешанной задачи для одного класса сильно нелинейных уравнений третьего порядка // «Краевые задачи для нелинейных уравнений», Новосибирск, 1982, с.92-99.
37. Кожанов А.И. Об одном классе нелинейных уравнений порядка $2n+1$ // «Неклассические задачи уравнений математической физики», Новосибирск, 1982, с.96-103.
38. Dorau Genowefa. On some mixed linear problems for the partial differential equation of third order // "Demonstr. Math.", 1983, 16, №3, pp.777-785.
39. Ebihara Yukiyoishi. Some evolution equations with linear and quasilinear strong dissipation // «Фукуока дайгаку сого кэнкю-дзёхо, сидзэн кагаку-хэн, Bull. Cent. Res. Inst.Fukuoka Univ. Natur.Sci.", 1983, №66, pp.7-19.
40. Артюшин А.Н. Смешанная задача для одного уравнения высокого порядка // "Применение методов функционального анализа к неклассическим уравнениям математической физики", Новосибирск, 1983, с.135-141.
41. Беркалиев З.Б. Аттрактор некоторой квазилинейной системы уравнений с частными производными // МГУ, М., 1984, 43с. (рукопись депонирована в ВИНТИ 10 июля 1984г., №4940-84 Деп.).
42. Шарифов Т.А. Исследование обобщённого решения одномерной краевой задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка // Деп. в ВИНТИ, №5490-81, Баку, 1981, 55с.
43. Шарифов Т.А. Исследование обобщённого решения одномерной краевой задачи в конечной области для одного класса нелинейных дифференци-

- альных уравнений в частных производных третьего порядка // Доклады АН Азерб. ССР, 1984, т.15, №2, с.10-16.
44. Шарифов Т.А. Исследование решения почти всюду одномерной краевой задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. I. // Деп. в ВИНТИ, №4933-82, Баку, 1982, 26 с.
45. Шарифов Т.А. Исследование решения почти всюду одномерной краевой задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. II. // Деп. в АЗНИИТИ, №117, АЗ-Д 84 от 19.10.83, 33 с.
46. Шарифов Т.А. Исследование классического решения одномерной краевой задачи для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. I. // Деп. в АЗНИИТИ, №118, АЗ-Д 83 от 19.10.83, 30 с.
47. Шарифов Т.А. Исследование классического решения одномерной краевой задачи для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. II. // Деп. в АЗНИИТИ, №187, АЗ-Д 84 от 04.04.84, 29 с.
48. Шарифов Т.А. Исследование классического решения одномерной краевой задачи для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с нелинейной операторной правой частью // Материалы IV республиканской конференции молодых учёных по математике и механике, посвященной 60-летию образования СССР, часть II, Издательство «Элм», Баку, 1983, с.249-252.
49. Худавердиев К.И., Шарифов Т.А. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса полулинейных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка // Материалы IV республиканской конференции молодых учёных по математике и механике, посвященной 60-летию образования СССР, часть II, Издательство «Элм», Баку, 1983, с.245-248.
50. Худавердиев К.И., Шарифов Т.А. Исследование почти всюду и классического решений одномерной смешанной задачи для одного класса полулинейных дифференциальных уравнений третьего порядка // «Дифференциальные уравнения с частными производными и их приложения» (тематический сборник научных трудов). Издание Азгосуниверситета, 1983, с.93-104.
51. Худавердиев К.И., Шарифов Т.А. О классической разрешимости в целом одномерной смешанной задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка // «Исследования по дифференциальным уравнениям» (тематический сборник научных трудов). Издание Азгосуниверситета, 1984, с.36-47.
52. Худавердиев К.И., Шарифов Т.А. Исследование почти всюду и классического решений одномерной смешанной задачи для одного класса по-

- дулинейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Деп. в АзНИИНТИ, №188 Аз-Д 84 от 04.04.84, 64 с.
53. Шарифов Т.А. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка. Дисс... канд.физ.мат.наук – Баку, 1985, 153 с.
 54. Dang Dinh Hai. On a strongly damped quasilinear wave equation // "Demonstr. Math.", 1986, 19, №2, pp. 327-340.
 55. Сувейка И.В. Об асимптотическом поведении решений основных смешанных задач во внешности компакта для уравнения распространения возмущений в упруго-вязких средах // «Труды V республиканской конференции по нелинейным задачам математической физики, Львов, 9-17 сентября 1985 г.», Донецкий университет, Донецк, 1987, с.188-190 (рукопись депонирована в Укр НИИНТИ 16.07.87, №2077-Ук87).
 56. Артюшин А.Н. Теорема существования для одного уравнения третьего порядка // «Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики», Новосибирск, 1987, с.3-9.
 57. Худавердиев К.И., Алиев С.Дж. Исследование многомерной смешанной задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Тематический сборник «Дифференциальные уравнения с частными производными и их приложения», издательство АГУ, Баку, 1986, с.13-24.
 58. Алиев С.Дж. Исследование решения почти всюду многомерной смешанной задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Деп. в ВИНТИ, №8063-В86, 26.02.86, 114 с.
 59. Худавердиев К.И., Алиев С.Дж. Исследование классического решения многомерной смешанной задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Тематический сборник «Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений с частными производными», издательство АГУ, Баку, 1987, с.11-24.
 60. Алиев С.Дж. Исследование классического решения многомерной смешанной задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Материалы VII республиканской конференции молодых учёных по математике и механике, книга I, «Элм», Баку, 1987, с.35-38.
 61. Худавердиев К.И. Исследование многомерной смешанной задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Тезисы докладов семинара-совещания по дифференциальным уравнениям и математической физике, г.Баку, 25-28 сентября 1990 г., Баку, 1990, с.33-34.
 62. Алиев С.Дж. Исследование многомерной смешанной задачи для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка. Дис...канд.физ.наук – Баку, 1987, 145 с.

Лаптев Г.И. Разрешимость начально-краевых задач для квазилинейных уравнений с частными производными третьего порядка с одной пространственной переменной // Дифференциальные уравнения, 1988, 24, №6, с.1011-1021.

Лаптев Г.И. Об одном квазилинейном уравнении с частными производными третьего порядка // Дифференциальные уравнения, 1988, 24, №7, с.1270-1272.

Lin Yan Ping. A mixed type boundary problem describing the propagation of disturbances in viscous media.I. Weak solutions of quasi-linear equations // J. Math.Anal.and Appl., 1988, 135, №2, pp.644-653.

Liu Yacheng, Liu Daocheng. Initial and boundary-value problem of equation $u_{tt} - \alpha \Delta u_t - \Delta u = f(u)$ // Хуанхжун гунсюэюань сюэбао. J.Huazhong (Cent.China) Univ.Sci. and Technol., 1988, 16, №6, pp.169-173.

Andrade N.G. Weak periodic solutions of a nonlinear wave equation // Mat.Apl.e. comput., 1988, 7, №3, pp.169-185.

Kubaszewski Wladyslaw. A limit problem for the equation $D_t Pu = f$ in the strip // Lesz. nauk. opusc. math., AGH Krakowie, 1988, №4, pp.129-137.

Жамалов Р.С. Задача с косой производной для одного уравнения третьего порядка // «Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики», Новосибирск, 1989, с.115-116.

Tsujioaka Kumio. On a damped wave equation with a singular boundary condition // Saitama Math.J., 1990, 8, pp.31-39.

Забрейко П.П., Красносельский М.А. Об одном приёме получения новых принципов неподвижной точки // Доклады АН СССР, 1967, т.176, №6, с.1233-1235.

Функциональный анализ. СМБ (под редакцией С.Г.Крейна и др.). М.: Наука, 1972, 544с.

Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М.: Мир, 1965, 276 с.